Combinatorics on Words and **Mathematical Physics**

Kruh u Jilemnice, Czech Republic

May 18–24, 2014

Kvantový tunelový jev

Kalvoda Tomáš

Abstrakt: Cílem této přednášky je seznámit studenty s kvantovým tunelovým jevem. Budeme se proto zabývat kvantovým modelem částice pohybující se na přímce $\mathbb{R}$ v potenciálu V, který pro jednoduchost výkladu budeme volit ve tvaru pravoúhlého potenciálového valu, či jámy. Nejprve ukážeme, jak popsat stav kvantové částice pomocí vlnové funkce v Hilbertově prostoru. Pomocí principu korespondence sestrojíme Hamiltonův operátor uvažovaného systému. Dále budeme analyzovat spojité spektrum tohoto Hamiltonova operátoru a příslušné rozptylové vlastní stavy Hamiltonova operátoru popisující nalétávající, odražené a tunelující částice. Výklad završíme analýzou získaných vzorců pro pravděpodobnost průchodu/odrazu částice od bariéry a porovnáním s klasickým modelem.

Vázané stavy

Hazala Matěj – problém od Tomáše Kalvody

Abstrakt: Opět se zabývejme částicí na přímce v potenciálu

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 \le x \le L, \\ 0, & x < 0 \text{ nebo } x > L, \end{cases}$$

kde $V_0 \in \mathbb{R}$. Podle znaménka V_0 se tedy jedná o jámu, bariéru, nebo zcela volnou částici. Nalezněte vázané stavy Hamiltoniánu

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad D(H) = \{\psi \in \mathscr{H} \mid \psi, \psi' \in AC,\ \psi'' \in \mathscr{H}\},$$

kde $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}x)$. Přesněji, zkoumejte existenci řešení rovnice

$$H\psi = E\psi, \quad \psi \in D(H)$$

v závislosti na $E \in \mathbb{R}$.

Odraz na pravoúhlé potenciálové jámě

Hazala Matěj – problém od Tomáše Kalvody

Abstrakt: Uvažme kvantovou částici o hmotnosti $m > 0$ pohybující se po přímce pod vlivem pravoúhlého potenciálu

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x \leq L, \\ 0, & x < 0 \text{ nebo } x > L, \end{cases}$$

kde $L > 0$ a $V_0 < 0$. Jedná se tedy o potenciálovou jámu. Předpokládejme, že z $-\infty$ nalétávají na jámu částice, část z nich se odrazí a část z nich proletí a pokračuje do $+\infty$. Podobně jako v přednášce odvoďte koeficient odrazu. Diskutujte jeho vlastnosti a porovnejte je s klasickým modelem.

Spin aneb jak algebra vstupuje do kvantové mechaniky

Kolešová Helena

Abstrakt: V roce 1924 Wolfgang Pauli zjistil, že aby mohl zavést svůj vylučovací princip, potřebuje, aby byl elektron popsán kromě známých veličin ještě jistou veličinou, která v klasické fyzice nemá ekvivalent a může nabývat právě dvou hodnot. George Uhlenbeck a Samuel Goudsmit o rok později objevili, že se jedná o jakýsi vnitřní moment hybnosti, takzvaný spin. Ve své přednášce budu mluvit o tom, jak s tím vším souvisí Lieova algebra su(2) a její reprezentace a jako motivaci pro další studium snad i nastíním, jak se ke spinu dá dojít z požadavku platnosti teorie relativity.

Základy epidemiologie a dynamika chronické formy smrtícího vtipu:
Dá se to vůbec přežít?

Kozák Michal, Novák Radek

Abstrakt: Epidemologické modely patří v dnešní době k hojně studovaným matematickým systémům, jejichž analýza se již v minulosti ukázala být nápomocná k vymýcení některých chorob. Právě analýza takových systémů bude náplní přednášek. Kurz začne teoretickou přípravou: úvodem do teorie stability diferenciálních rovnic a bifurkací a představením základních epidemiologických modelů a jejich rozšíření. Z matematického hlediska se budeme zabývat obyčejnými i parciálními diferenciálními rovnicemi a rovnicemi se zpožděním. Cílem je osvětlit vliv zpoždění, difuze nebo okrajových podmínek na stabilitu systému a vývoj jeho řešení. Výsledné teoretické závěry budou podpořeny vhodnými numerickými výpočty.

Vliv zpoždění na dynamiku jedné obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Kozmová Nikola – problém od Karolíny Korvasové a Michala Kozáka

Abstrakt: Cílem projektu je z kvalitativního hlediska porovnat chování dynamických systémů generovaných jednou obyčejnou diferenciální rovnicí prvního řádu bez zpoždění a s diskrétním zpožděním a vysvětlit, proč pouze druhá zmíněná rovnice umožňuje výskyt oscilací. Úkolem studenta bude provést analýzu stability u obou typů rovnic a nakreslit přílušné bifurkační diagramy v rovině dané dvěma parametry rovnice.

Analýza bifurkací epidemiologického modelu SIR
Nguyen Zbyněk – problém od Karolíny Korvasové a Michala Kozáka

Abstrakt: Cílem projektu je analyzovat kvalitativní chování dynamického systému generovaného modelem SIR (susceptible – infected – removed), který popisuje šíření infekce v homogenní populaci s postinfekční imunitou nejprve analyticky, a následně numericky pomocí balíku MatCont pro výpočetní software Matlab. Výsledky by měly obsahovat bifurkační diagram ve zvolené rovině, fázový diagram a případně kontinuaci ekvilibria vzhledem ke zvolenému parametru.

Vliv difuze na chování dynamického systému
Kozmová Nikola a Nguyen Zbyněk – problém od Karolíny Korvasové a Michala Kozáka

Abstrakt: Cílem projektu je prozkoumat vliv difuze na dynamiku systému dvou reakčně (-difuzních) rovnic a stanovit podmínky pro vznik prostorově nehomogenního stacionárního řešení. Výsledky lze ilustrovat numerickou analýzou stacionární úlohy a případně kontinuací ekvilibria pomocí balíku MatCont pro výpočetní software Matlab. Závěrečná prezentace na konferenci by měla obsahovat analytické výsledky a příklady numerických řešení úlohy.

Efektivní dynamika v kvantových vlnovodech
Krejčiřík David

Abstrakt: Odvodíme efektivní hamiltonián pro kvantovou částici pohybující se v okolí prostorové křivky. Na výsledku budeme demonstrovat vzájemně opačné vlivy křivosti a torse na kvantový transport.

Úvod do teorie ortogonálních polynomů
Štampach František, problémy: Gromada Daniel a Urban Patrik

Abstrakt: Cílem minikurzu je ve třech kratších přednáškách seznámit studenty se základy teorie ortogonálních polynomů. Tvrzení, u kterých vystačíme s elementárními prostředky (lineární algebra a matematická analýza 1. a 2. ročníku FJFI), dokážeme. Jiné důkazy (zejména ke konci) vynecháme.

Sylabus jednotlivých přednášek spolu s úkoly pro studenty bude následující:
Přednáška č. 1: Nezbytné základy teorie míry, integrál s absolutně spojitou a diskrétní mírou, definice OG posloupnosti polynomů, příklady, rekurentní relace, Favardova věta.
Úkol č. 1: Dokažte explicitní vzorec pro Laguerrovy polynomy, znáte-li relaci ortogonality. Dále odvoďte vytvořující funkci pro Laguerrovy polynomy a rekurentní rovnice generující tuto posloupnost polynomů.
Přednáška č. 2: Christofellova-Darbouxova formule, vlastnosti kořenů OG polynomů, Bochnerova klasifikace klasických OG polynomů, Gaussova kvadratura.
Úkol č. 2: Dokažte, že mezi každou dvojicí sousedních kořenů OG polynomu p_n leží právě jeden kořen polynomu p_{n+1}.
Úkol č. 3: Aplikací obecného postupu z přednášky odvoďte explicitní tvar (zobecněných) Laguerrových polynomů a relaci ortogonality, znáte-li pouze hustotu míry ortogonality a standardní normalizaci.
Přednáška č. 3: Markovova věta a diskuse (ne)jednoznačnosti míry ortogonality OG polynomů, Nevanlinnova věta. Přístup spíše informativní, ilustrace na příkladech.
Úkol č. 4: Z rekurentní relace pro Charlierovy polynomy odvoďte míru ortognality (Poisson). Je to jediná míra, vůči které jsou Charlierovy polynomy ortogonální?

Krátký úvod do matematické formulace kvantové mechaniky
Tušek Matěj

Abstrakt: V přednášce se seznámíme s pojmem stav kvantového systému, dále se budeme zabývat jeho měřením pomocí tzv. filtrů. To nás dovede k slavnému dvouštěrbinovému experimentu, jehož pozorování matematicky odvodíme. V průběhu výkladu zavedeme i kvantovou pozorovatelnou a její střední hodnotu v daném kvantovém stavu.

Úvod do problematiky kvantového popisu částice na intervalu a bodových interakcí na přímce
Vašata Daniel

Abstrakt: V první části přednášky se budeme zabývat kvantovým popisem volné jednorozměrné částice v nekonečné potenciálové jámě. Porovnáním s konečnou potenciálovou jámou odvodíme definiční obor samosdruženého operátoru kinetické energie a vyřešíme jeho spektrum. Takto však získáme pouze jeden z možných kvantových popisů (tj. samosdružených operátorů). Ukážeme si proto obecné vyjádření všech samosdružených operátorů kinetické energie odpovídajících tomuto systému a uvedeme jednu

z možných parametrizací jejich definičního oboru. Tím se přirozeně dostaneme k pojmu bodové interakce na kružnici a posléze i na přímce. Nakonec se podrobněji podíváme na δ interakci na přímce a odvodíme příslušné koeficienty odrazu a průchodu.

Spektra různých samosdružených rozšíření operátoru kinetické energie volné kvantové částice na konečném intervalu

Kotrbatý Jan – problém od Daniela Vašaty

Abstrakt: Uvažujte volnou jednorozměrnou částici na intervalu $(0, 2\pi)$. Určete vlastní čísla, jejich násobnosti a příslušné vlastní vektory Hamiltoniánu, který odpovídá samosdruženému rozšíření určenému následujícími okrajovými podmínkami:

- Neumannovy okrajové podmínky, t.j.
$$f'(0_+) = f'(2\pi_-) = 0,$$
- periodické okrajové podmínky,
$$f(0_+) = f(2\pi_-) \quad \text{a} \quad f'(0_+) = f'(2\pi_-),$$
- škálově invariantní okrajové podmínky
$$f(0_+) = \frac{1}{\alpha} f(2\pi_-) \quad \text{a} \quad f'(0_+) = \alpha f'(2\pi_-),$$
kde $\alpha \geq 0$ je reálný parametr.

Dále ukažte, jakým volbám matice $\boldsymbol{U}$ z přednášky tyto podmínky odpovídají.

Korektnost parametrizace samosdružených rozšíření operátoru kinetické energie volné kvantové částice na konečném intervalu pomocí unitární matice

František Růžička – problém od Daniela Vašaty

Abstrakt: Ukažte, že určení definiční oboru T pomocí rovnic pro okrajové podmínky ve tvaru
$$(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{I})\Phi + iL_0(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{I})\Phi' = 0,$$
kde
$$\Phi = \begin{pmatrix} f(0_+) \\ f(2\pi_-) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \Phi' = \begin{pmatrix} f'(0_+) \\ f'(2\pi_-) \end{pmatrix}$$
je korektní. K tomu nejprve dokažte, že výše uvedená soustava je pro každé $\boldsymbol{U}$ a L_0 soustavou dvou lineárně nezávislých rovnic pro okrajové hodnoty fce f a potom, že pro pro každou dvojici funkcí $f, g \in D(T_1)$ splňující tuto soustavu, platí $(f, Tg) = (Tf, g)$, t.j. jedná se o symetrickou množinu okrajových podmínek. Pro zjednodušení je možné využít vhodného přepisu a polarizačních identit.