Stabilita diferenciálních rovnic a bifurkace

Michal Kozák, Radek Novák

MAFIA
FJFI ČVUT

19.5.2014

Content

1. Základy ODR
2. Stabilita
   - Pojem stabilita
   - Linearizovaná stabilita
   - Ljapunovova stabilita
3. Bifurkace
   - Pojem bifurkace
   - Hopfova bifurkace
   - Globální bifurkační věta
4. Bonbonky

Content

1. Základy ODR
2. Stabilita
   - Pojem stabilita
   - Linearizovaná stabilita
   - Ljapunovova stabilita
3. Bifurkace
   - Pojem bifurkace
   - Hopfova bifurkace
   - Globální bifurkační věta
4. Bonbonky

Content

1. Základy ODR
2. Stabilita
   - Pojem stabilita
   - Linearizovaná stabilita
   - Ljapunovova stabilita
3. Bifurkace
   - Pojem bifurkace
   - Hopfova bifurkace
   - Globální bifurkační věta
4. Bonbonky

Content

1. Základy ODR
2. Stabilita
   - Pojem stabilita
   - Linearizovaná stabilita
   - Ljapunovova stabilita
3. Bifurkace
   - Pojem bifurkace
   - Hopfova bifurkace
   - Globální bifurkační věta
4. Bonbonky

Základní úloha

Uvažme úlohu

$$x' = f(x,t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

kde předpokládáme:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $I = (\tau, +\infty)$, $\{0\} \times I \subset \Omega$,
- $f(x,t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá,
- 0 je řešením, tj. $f(0,t) = 0$ pro všechna $t \in I$,
- $\varphi(t; t_0, x_0)$ příslušná řešící funkce.

Základní úloha

Uvažme úlohu

$$x' = f(x,t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

kde předpokládáme:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $I = (\tau, +\infty)$, $\{0\} \times I \subset \Omega$,
- $f(x,t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá,
- 0 je řešením, tj. $f(0,t) = 0$ pro všechna $t \in I$,
- $\varphi(t; t_0, x_0)$ příslušná řešící funkce.

Základní úloha

Uvažme úlohu

$$x' = f(x, t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

kde předpokládáme:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $I = (\tau, +\infty)$, $\{0\} \times I \subset \Omega$,
- $f(x, t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá,
- 0 je řešením, tj. $f(0, t) = 0$ pro všechna $t \in I$,
- $\varphi(t; t_0, x_0)$ příslušná řešící funkce.

Základní úloha

Uvažme úlohu

$$x' = f(x,t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

kde předpokládáme:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $I = (\tau, +\infty)$, $\{0\} \times I \subset \Omega$,
- $f(x,t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá,
- 0 je řešením, tj. $f(0,t) = 0$ pro všechna $t \in I$,
- $\varphi(t; t_0, x_0)$ příslušná řešící funkce.

Základní úloha

Uvažme úlohu

$$x' = f(x, t),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

kde předpokládáme:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $I = (\tau, +\infty)$, $\{0\} \times I \subset \Omega$,
- $f(x, t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ spojitá,
- 0 je řešením, tj. $f(0, t) = 0$ pro všechna $t \in I$,
- $\varphi(t; t_0, x_0)$ příslušná řešící funkce.

Základní fakta

Věty o existenci:

- (Peanova věta) Buď f Lipschitzovská, pak lokálně existuje řešení.
- (Picardova věta) Buď f třídy $\mathcal{C}^1$, pak lokálně existuje jednoznačné řešení.

Uvažme homogenní lineární systém:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

- Prostor řešení je dimenze n.
- Fundamentálním systémem nazýváme libovolnou bázi prostoru řešení.
- Fundamentální maticí nazýváme matici složenou z funkcí fundamentálního systému.

Základní fakta

Věty o existenci:

- (Peanova věta) Buď f Lipschitzovská, pak lokálně existuje řešení.
- (Picardova věta) Buď f třídy C^1, pak lokálně existuje jednoznačné řešení.

Uvažme homogenní lineární systém:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

- Prostor řešení je dimenze n.
- Fundamentálním systémem nazýváme libovolnou bázi prostoru řešení.
- Fundamentální maticí nazýváme matici složenou z funkcí fundamentálního systému.

Základní fakta

Věty o existenci:

- (Peanova věta) Buď f Lipschitzovská, pak lokálně existuje řešení.
- (Picardova věta) Buď f třídy $\mathcal{C}^1$, pak lokálně existuje jednoznačné řešení.

Uvažme homogenní lineární systém:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

- Prostor řešení je dimenze n.
- Fundamentálním systémem nazýváme libovolnou bázi prostoru řešení.
- Fundamentální maticí nazýváme matici složenou z funkcí fundamentálního systému.

Základní fakta

Věty o existenci:

- (Peanova věta) Buď f Lipschitzovská, pak lokálně existuje řešení.
- (Picardova věta) Buď f třídy $\mathcal{C}^1$, pak lokálně existuje jednoznačné řešení.

Uvažme homogenní lineární systém:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

- Prostor řešení je dimenze n.
- Fundamentálním systémem nazýváme libovolnou bázi prostoru řešení.
- Fundamentální maticí nazýváme matici složenou z funkcí fundamentálního systému.

Základní fakta

Věty o existenci:

- (Peanova věta) Buď f Lipschitzovská, pak lokálně existuje řešení.
- (Picardova věta) Buď f třídy $\mathcal{C}^1$, pak lokálně existuje jednoznačné řešení.

Uvažme homogenní lineární systém:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

- Prostor řešení je dimenze n.
- Fundamentálním systémem nazýváme libovolnou bázi prostoru řešení.
- Fundamentální maticí nazýváme matici složenou z funkcí fundamentálního systému.

Základní fakta

Věty o existenci:

- (Peanova věta) Buď f Lipschitzovská, pak lokálně existuje řešení.
- (Picardova věta) Buď f třídy $\mathcal{C}^1$, pak lokálně existuje jednoznačné řešení.

Uvažme homogenní lineární systém:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

- Prostor řešení je dimenze n.
- Fundamentálním systémem nazýváme libovolnou bázi prostoru řešení.
- Fundamentální maticí nazýváme matici složenou z funkcí fundamentálního systému.

Základní fakta

Věty o existenci:

- (Peanova věta) Buď f Lipschitzovská, pak lokálně existuje řešení.
- (Picardova věta) Buď f třídy $\mathcal{C}^1$, pak lokálně existuje jednoznačné řešení.

Uvažme homogenní lineární systém:

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

- Prostor řešení je dimenze n.
- Fundamentálním systémem nazýváme libovolnou bázi prostoru řešení.
- Fundamentální maticí nazýváme matici složenou z funkcí fundamentálního systému.

Stabilita

Řekneme, že nulové řešení je:

- stabilní, pokud

$$\forall t_0 \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ |x_0| < \delta, \forall t \geq t_0 : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno}, \\ |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

- nestabilní, pokud není stabilní.
- lokální atraktor, pokud

$$\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ |x_0| < \delta : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno } \forall t \geq t_0, \\ \lim_{t \to \infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$$

- asymptoticky stabilní, pokud je stabilním lokálním atraktorem.

Stabilita

Řekneme, že nulové řešení je:

- stabilní, pokud

$$\forall t_0 \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ |x_0| < \delta, \forall t \ge t_0 : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno}, \quad |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

- nestabilní, pokud není stabilní.
- lokální atraktor, pokud

$$\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ |x_0| < \delta : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno } \forall t \ge t_0, \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$$

- asymptoticky stabilní, pokud je stabilním lokálním atraktorem.

Stabilita

Řekneme, že nulové řešení je:

- stabilní, pokud

$$\forall t_0 \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ |x_0| < \delta, \forall t \geq t_0 : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno, } |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

- nestabilní, pokud není stabilní.
- lokální atraktor, pokud

$$\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ |x_0| < \delta : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno } \forall t \geq t_0, \lim_{t \to \infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$$

- asymptoticky stabilní, pokud je stabilním lokálním atraktorem.

Stabilita

Řekneme, že nulové řešení je:

- stabilní, pokud

$$\forall t_0 \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ |x_0| < \delta, \forall t \geq t_0 : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno},$$
$$|\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

- nestabilní, pokud není stabilní.
- lokální atraktor, pokud

$$\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ |x_0| < \delta : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno } \forall t \geq t_0,$$
$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$$

- asymptoticky stabilní, pokud je stabilním lokálním atraktorem.

Stabilita

Řekneme, že nulové řešení je:

- stabilní, pokud

$$\forall t_0 \in I, \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ |x_0| < \delta, \forall t \geq t_0 : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno}, \\ |\varphi(t; t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

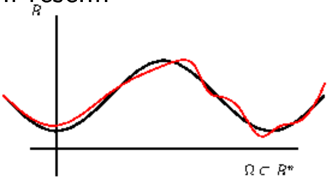
- nestabilní, pokud není stabilní.
- lokální atraktor, pokud

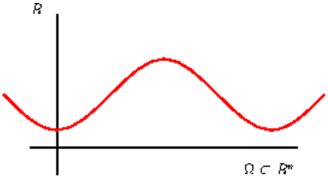
$$\forall t_0 \in I\ \exists \eta > 0\ |x_0| < \delta : \varphi(t; t_0, x_0) \text{ je definováno } \forall t \geq t_0, \\ \lim_{t \to \infty} \varphi(t; t_0, x_0) = 0.$$

- asymptoticky stabilní, pokud je stabilním lokálním atraktorem.

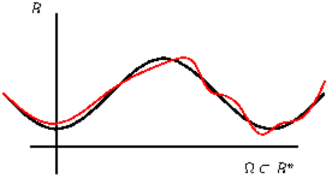
Stabilita - příklady

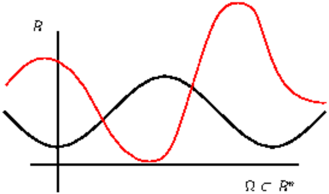
Stabilní řešení:





Nestabilní řešení:





Stabilita - speciální úlohy

Nechť $A(t)\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá a nechť $\varphi(t)$ je fundamentální matice úlohy

$$x' = A(t)x.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\|\varphi(t)\|$ je omezená na I,
- asymptoticky stabilní, právě když $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = 0$.

Nechť A je konstatní matice a řešme úlohu

$$x' = Ax.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, navíc $\operatorname{Re}\lambda = 0$ přísluší pouze diagonální Jordanově buňce.
- asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.

Stabilita - speciální úlohy

Nechť $A(t)\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá a nechť $\varphi(t)$ je fundamentální matice úlohy

$$x' = A(t)x.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\|\varphi(t)\|$ je omezená na I,
- asymptoticky stabilní, právě když $\lim_{t\to\infty}\|\varphi(t)\| = 0$.

Nechť A je konstatní matice a řešme úlohu

$$x' = Ax.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, navíc $\operatorname{Re}\lambda = 0$ přísluší pouze diagonální Jordanově buňce.
- asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.

Stabilita - speciální úlohy

Nechť $A(t)\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá a nechť $\varphi(t)$ je fundamentální matice úlohy

$$x' = A(t)x.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\|\varphi(t)\|$ je omezená na I,
- asymptoticky stabilní, právě když $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = 0$.

Nechť A je konstatní matice a řešme úlohu

$$x' = Ax.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, navíc $\operatorname{Re}\lambda = 0$ přísluší pouze diagonální Jordanově buňce.
- asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.

Stabilita - speciální úlohy

Nechť $A(t)\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá a nechť $\varphi(t)$ je fundamentální matice úlohy

$$x' = A(t)x.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\|\varphi(t)\|$ je omezená na I,
- asymptoticky stabilní, právě když $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = 0$.

Nechť A je konstatní matice a řešme úlohu

$$x' = Ax.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, navíc $\operatorname{Re}\lambda = 0$ přísluší pouze diagonální Jordanově buňce.
- asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.

Stabilita - speciální úlohy

Nechť $A(t)\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá a nechť $\varphi(t)$ je fundamentální matice úlohy

$$x' = A(t)x.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\|\varphi(t)\|$ je omezená na I,
- asymptoticky stabilní, právě když $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = 0$.

Nechť A je konstatní matice a řešme úlohu

$$x' = Ax.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, navíc $\operatorname{Re}\lambda = 0$ přísluší pouze diagonální Jordanově buňce.
- asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.

Stabilita - speciální úlohy

Nechť $A(t)\colon I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je spojitá a nechť $\varphi(t)$ je fundamentální matice úlohy

$$x' = A(t)x.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\|\varphi(t)\|$ je omezená na I,
- asymptoticky stabilní, právě když $\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| = 0$.

Nechť A je konstatní matice a řešme úlohu

$$x' = Ax.$$

Potom je nulové řešení

- stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, navíc $\operatorname{Re}\lambda = 0$ přísluší pouze diagonální Jordanově buňce.
- asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(A)$.

Linearizovaná stabilita

Uvažme úlohu

$$x' = f(x),$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Nechť existuje x_0 takové, že $f(x_0) = 0$, f je třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí x_0 a označme $A = \nabla f(x_0)$. Pak platí:

- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je asymptoticky stabilní.
- $\exists \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je nestabilní.

Co pro ostatní případy?

- vliv nelinearity
- Ljapunovská stabilita
- La Salleho princip invariance

Linearizovaná stabilita

Uvažme úlohu

$$x' = f(x),$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Nechť existuje x_0 takové, že $f(x_0) = 0$, f je třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí x_0 a označme $A = \nabla f(x_0)$. Pak platí:

- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\,\lambda < 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je asymptoticky stabilní.
- $\exists \lambda \in \sigma(A) : \mathrm{Re}\,\lambda > 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je nestabilní.

Co pro ostatní případy?

- vliv nelinearity
- Ljapunovská stabilita
- La Salleho princip invariance

Linearizovaná stabilita

Uvažme úlohu

$$x' = f(x),$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Nechť existuje x_0 takové, že $f(x_0) = 0$, f je třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí x_0 a označme $A = \nabla f(x_0)$. Pak platí:

- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je asymptoticky stabilní.
- $\exists \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je nestabilní.

Co pro ostatní případy?

- vliv nelinearity
- Ljapunovská stabilita
- La Salleho princip invariance

Linearizovaná stabilita

Uvažme úlohu

$$x' = f(x),$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Nechť existuje x_0 takové, že $f(x_0) = 0$, f je třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí x_0 a označme $A = \nabla f(x_0)$. Pak platí:

- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je asymptoticky stabilní.
- $\exists \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je nestabilní.

Co pro ostatní případy?

- vliv nelinearity
- Ljapunovská stabilita
- La Salleho princip invariance

Linearizovaná stabilita

Uvažme úlohu

$$x' = f(x),$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Nechť existuje x_0 takové, že $f(x_0) = 0$, f je třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí x_0 a označme $A = \nabla f(x_0)$. Pak platí:

- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0 \ \Rightarrow\ x_0$ je asymptoticky stabilní.
- $\exists \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0 \ \Rightarrow\ x_0$ je nestabilní.

Co pro ostatní případy?

- vliv nelinearity
- Ljapunovská stabilita
- La Salleho princip invariance

Linearizovaná stabilita

Uvažme úlohu

$$x' = f(x),$$
$$x(t_0) = x_0.$$

Nechť existuje x_0 takové, že $f(x_0) = 0$, f je třídy $\mathcal{C}^1$ na okolí x_0 a označme $A = \nabla f(x_0)$. Pak platí:

- $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda < 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je asymptoticky stabilní.
- $\exists \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda > 0 \;\Rightarrow\; x_0$ je nestabilní.

Co pro ostatní případy?

- vliv nelinearity
- Ljapunovská stabilita
- La Salleho princip invariance

Ljapunovova metoda

- Funkce $w(x): \Omega \to [0, \infty)$ se nazve pozitivně definitní, pokud je spojitá, $w(0) = 0$ a $w(x) > 0$ pro všechna $x \in \Omega \setminus \{0\}$.
- Funkce $V(t, x): I \times \Omega \to [0, \infty)$ se nazve Ljapunovská funkce systému v Ω, jestliže
  1. V je spojitá, $V(t, 0) = 0$ pro všechna $t \in I$,
  2. $V(t, x(t))$ je nerostoucí pro všechna $x(t)$ řešení systému,
  3. existuje w pozitivně definitní taková, že $V(t, \xi) \geq w(\xi)$ pro všechna $\xi \in \Omega$.

Věta

Nechť má systém v 0 Ljapunovskou funkci. Potom nulové řešení je stabilní.

Ljapunovova metoda

- Funkce $w(x)\colon \Omega \to [0,\infty)$ se nazve pozitivně definitní, pokud je spojitá, $w(0) = 0$ a $w(x) > 0$ pro všechna $x \in \Omega \setminus \{0\}$.
- Funkce $V(t,x)\colon I \times \Omega \to [0,\infty)$ se nazve Ljapunovská funkce systému v Ω, jestliže
  1. V je spojitá, $V(t,0) = 0$ pro všechna $t \in I$,
  2. $V(t,x(t))$ je nerostoucí pro všechna $x(t)$ řešení systému,
  3. existuje w pozitivně definitní taková, že $V(t,\xi) \ge w(\xi)$ pro všechna $\xi \in \Omega$.

Věta

Nechť má systém v 0 Ljapunovskou funkci. Potom nulové řešení je stabilní.

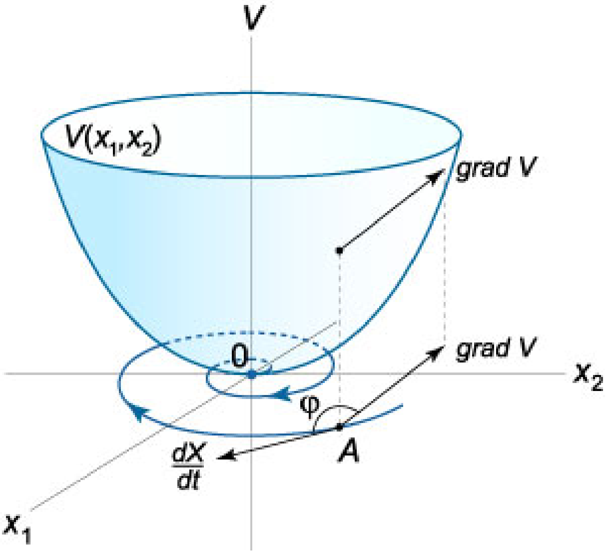
Ljapunovova metoda

- Funkce $w(x)\colon \Omega \to [0,\infty)$ se nazve pozitivně definitní, pokud je spojitá, $w(0) = 0$ a $w(x) > 0$ pro všechna $x \in \Omega \setminus \{0\}$.
- Funkce $V(t,x)\colon I \times \Omega \to [0,\infty)$ se nazve Ljapunovská funkce systému v Ω, jestliže
  1. V je spojitá, $V(t,0) = 0$ pro všechna $t \in I$,
  2. $V(t,x(t))$ je nerostoucí pro všechna $x(t)$ řešení systému,
  3. existuje w pozitivně definitní taková, že $V(t,\xi) \geq w(\xi)$ pro všechna $\xi \in \Omega$.

Věta

Nechť má systém v 0 Ljapunovskou funkci. Potom nulové řešení je stabilní.

Ljapunovova metoda



Ljapunovova metoda

Příklad:

$$x' = -y - xy$$
$$y' = x + xy$$

Věta

Nechť má systém Ljapunovskou funkci V, nechť navíc pro každé řešení $x(t)$ v Ω platí

$$\frac{d}{dt}V(t, x(t)) \leq -\eta(x(t)),$$

kde η je pozitivně definitní a navíc pro každé $t \in I$, $\xi \in \Omega$ platí

$$V(t, \xi) \leq \lambda(\xi),$$

kde λ je pozitivně definitní. Potom 0 je asymptoticky stabilní.

Ljapunovova metoda

Příklad:

$$x' = -y - xy$$
$$y' = x + xy$$

Věta

Nechť má systém Ljapunovskou funkci V, nechť navíc pro každé řešení $x(t)$ v Ω platí

$$\frac{d}{dt} V(t, x(t)) \leq -\eta(x(t)),$$

kde η je pozitivně definitní a navíc pro každé $t \in I$, $\xi \in \Omega$ platí

$$V(t, \xi) \leq \lambda(\xi),$$

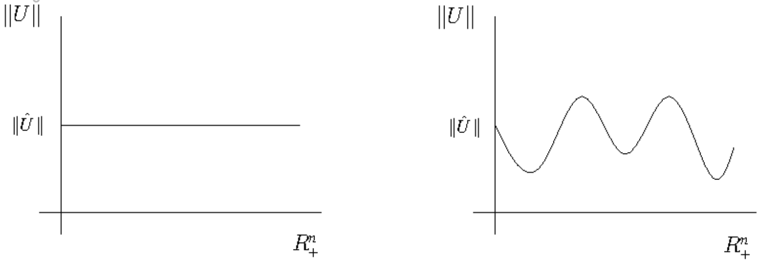
kde λ je pozitivně definitní. Potom 0 je asymptoticky stabilní.

Bifurkace

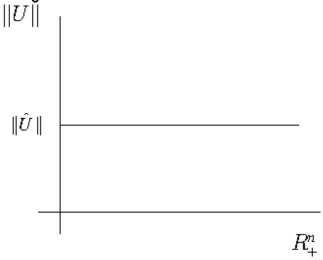
Uvažme systém

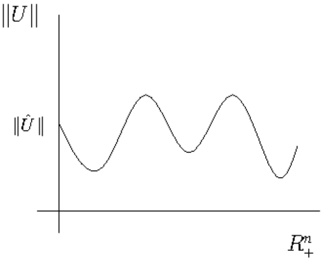
$$x' = f(x, \mu).$$

Bifurkace je bod (μ_0, x_0), ve kterém v závilosti na změnách parametru μ nastává podstatná (kvalitativní) změma chování řešení v okolí x_0.



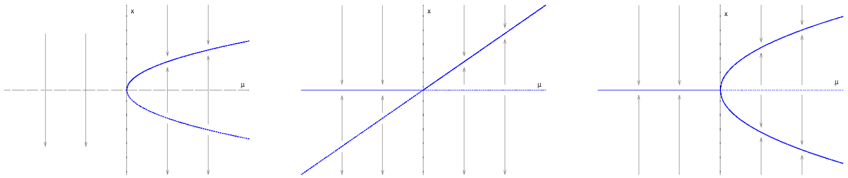
Uvažme systém
$$x' = f(x, \mu).$$
Bifurkace je bod (μ_0, x_0), ve kterém v závilosti na změnách parametru μ nastává podstatná (kvalitativní) zděma chování řešení v okolí x_0.





Bifurkace - typy

sedlo-uzel	transkritická	vidličková
$x' = \mu - x^2$	$x' = \mu x - x^2 = x(\mu - x)$	$x' = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2)$

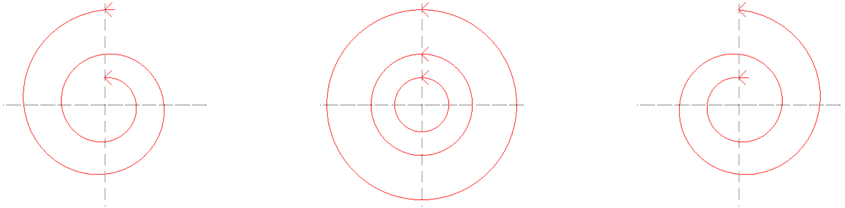


Hopfova bifurkace

Uvažme systém:

$$x' = \mu x - y \qquad A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \qquad \sigma(A_\mu) = \{\mu \pm i\}$$
$$y' = x + \mu y$$

Chování řešení v závislosti na parametru μ:



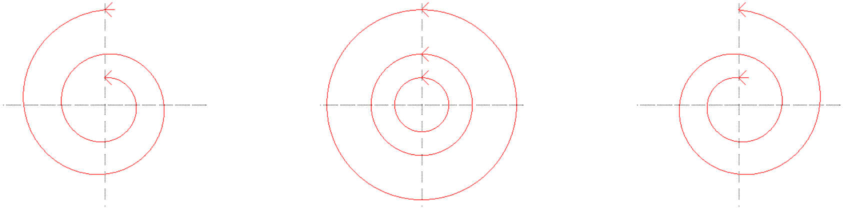
- $\mu < 0$: stabilní počátek, všechna řešení do něj míří
- $\mu = 0$: periodická řešení kolem počátku
- $\mu > 0$: nestabilní počátek, všechna řešení míří z něj

Hopfova bifurkace

Uvažme systém:

$$x' = \mu x - y \qquad A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \qquad \sigma(A_\mu) = \{\mu \pm i\}$$
$$y' = x + \mu y$$

Chování řešení v závislosti na parametru μ:



- $\mu < 0$: stabilní počátek, všechna řešení do něj míří
- $\mu = 0$: periodická řešení kolem počátku
- $\mu > 0$: nestabilní počátek, všechna řešení míří z něj

Torzo bifurkační věty

Za určitých předpokladů (Uvažujme μ_0 takové, že $[\mu_0, 0] \in O$ a pro μ z okolí bodu μ_0 existuje vlastní číslo λ_μ liché násobnosti).
Pak μ_0 je bifurkační bod a označíme-li množinu

$$S = \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R} \times H, U \text{nenulové řešení}\}}$$

a S^0 komponentu množiny S obsahující $[\mu_0, 0]$, je navíc bifurkace v bodě μ_0 globální v tom smyslu, že S^0 splňuje alespoň jednu z následujích podmínek:

1. Existuje $\hat{\mu} \neq \mu_0$ takové, že $[\hat{\mu}, 0] \in S^0$.
2. Existuje posloupnost $[\mu_n, U_n] \in S^0$ taková, že $[\mu_n, U_n] \to \partial O$
3. Existuje posloupnost $[\mu_n, U_n] \in S^0$ taková, že $\|U_n\| + |\mu_n| \to \infty$.

Torzo bifurkační věty

Za určitých předpokladů (Uvažujme μ_0 takové, že $[\mu_0, 0] \in O$ a pro μ z okolí bodu μ_0 existuje vlastní číslo λ_μ liché násobnosti).
Pak μ_0 je bifurkační bod a označíme-li množinu

$$S = \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R} \times H, U \text{nenulové řešení}\}}$$

a S^0 komponentu množiny S obsahující $[\mu_0, 0]$, je navíc bifurkace v bodě μ_0 globální v tom smyslu, že S^0 splňuje alespoň jednu z následujích podmínek:

1. Existuje $\hat{\mu} \neq \mu_0$ takové, že $[\hat{\mu}, 0] \in S^0$.
2. Existuje posloupnost $[\mu_n, U_n] \in S^0$ taková, že $[\mu_n, U_n] \to \partial O$
3. Existuje posloupnost $[\mu_n, U_n] \in S^0$ taková, že $\|U_n\| + |\mu_n| \to \infty$.

Torzo bifurkační věty

Za určitých předpokladů (Uvažujme μ_0 takové, že $[\mu_0, 0] \in O$ a pro μ z okolí bodu μ_0 existuje vlastní číslo λ_μ liché násobnosti).
Pak μ_0 je bifurkační bod a označíme-li množinu

$$S = \overline{\{[\mu, U] \in \mathbb{R} \times H, U \text{nenulové řešení}\}}$$

a S^0 komponentu množiny S obsahující $[\mu_0, 0]$, je navíc bifurkace v bodě μ_0 globální v tom smyslu, že S^0 splňuje alespoň jednu z následujích podmínek:

1. Existuje $\hat{\mu} \neq \mu_0$ takové, že $[\hat{\mu}, 0] \in S^0$.
2. Existuje posloupnost $[\mu_n, U_n] \in S^0$ taková, že $[\mu_n, U_n] \to \partial O$
3. Existuje posloupnost $[\mu_n, U_n] \in S^0$ taková, že $\|U_n\| + |\mu_n| \to \infty$.

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)

- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \leq u_i(t) \leq M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)

- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \leq u_i(t) \leq M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)

- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \leq u_i(t) \leq M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)

- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \leq u_i(t) \leq M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)

- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \leq u_i(t) \leq M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)

- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \leq u_i(t) \leq M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)
- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \le u_i(t) \le M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 1

Stabilita biologických společenstev:

- druhy musí dlouhodobě přežívat,
- nestabilita = vyhynutí jednoho druhu / vyhynutí celé populace
- robustnost modelu vzhledem k malým poruchám (nepřesnostem)

- pozitivní invariance (od krajů)
- asymptoticky stabilní
- absorbční množina (atrahující množina)

Systém je permanentní, pokud existují konstanty $m, M > 0$ takové, že pro každý počáteční bod $u = u(0)$ existuje čas $t_u > 0$ splňující

$$m \leq u_i(t) \leq M, \forall t > t_u.$$

Bonbonek 2

Uvažme systém

$$\begin{aligned} u_t &= b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) \\ v_t &= b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{na } [0,\infty).$$

Z věty o linearizované stabilitě:

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Po úpravě:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0.$$

Bonbonek 2

Uvažme systém

$$\begin{aligned} u_t &= b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) \\ v_t &= b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{na } [0,\infty).$$

Z věty o linearizované stabilitě:

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Po úpravě:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0.$$

Bonbonek 2

Uvažme systém

$$\begin{aligned} u_t &= b_{11}u + b_{12}v + n_1(u,v) \\ v_t &= b_{21}u + b_{22}v + n_2(u,v) \end{aligned} \quad \text{na } [0,\infty).$$

Z věty o linearizované stabilitě:

$$\det(B - \lambda I) = 0.$$

Po úpravě:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0.$$

Bonbonek 2

Máme rovnici:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0,$$

jejíž řešení jsou:

$$\lambda_1 = \frac{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2}.$$

Tvrzení

Nulové řešení je asymptoticky stabilní, právě když

$$\operatorname{tr} B = b_{11} + b_{22} < 0,$$

$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0.$$

Bonbonek 2

Máme rovnici:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0,$$

jejíž řešení jsou:

$$\lambda_1 = \frac{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2}.$$

Tvrzení

Nulové řešení je asymptoticky stabilní, právě když

$$\operatorname{tr} B = b_{11} + b_{22} < 0,$$

$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0.$$

Bonbonek 2

Máme rovnici:

$$\lambda^2 - (b_{11} + b_{22})\lambda + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = 0,$$

jejíž řešení jsou:

$$\lambda_1 = \frac{b_{11} + b_{22} + \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{b_{11} + b_{22} - \sqrt{(b_{11} + b_{22})^2 - 4(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})}}{2}.$$

Tvrzení

Nulové řešení je asymptoticky stabilní, právě když

$$\operatorname{tr} B = b_{11} + b_{22} < 0,$$

$$\det B = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} > 0.$$