Nulové módy a stabilita hmoty

Marie Fialová

QMATH, UCPH

SVK MAFIA, Děčín, květen 2019

L Erdös, J. P. Solovej, *The kernel of Dirac operators on* $\mathbb{S}^3$ *and* $\mathbb{R}^3$, Rev. in Math. Phys. 13 (2001), no. 10, 1247-1280

QMATH

L Erdös, J. P. Solovej, *The kernel of Dirac operators on* $\mathbb{S}^3$ *and* $\mathbb{R}^3$, Rev. in Math. Phys. 13 (2001), no. 10, 1247-1280

J. Fröhlich, E. H. Lieb and M. Loss, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. I. The one-electron atom*, Comm. Math. Phys. 104 (1986), no. 2, 251–270

- L Erdös, J. P. Solovej, *The kernel of Dirac operators on* $\mathbb{S}^3$ *and* $\mathbb{R}^3$, Rev. in Math. Phys. 13 (2001), no. 10, 1247-1280
- J. Fröhlich, E. H. Lieb and M. Loss, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. I. The one-electron atom*, Comm. Math. Phys. 104 (1986), no. 2, 251–270
- M. Loss, H. T. Yau, *Stability of Coulomb systems with magnetic fields. III.Zero energy bound states of the Pauli operator*, Comm. Math.Phys. 104 (1986), no. 2, 283-290

$Spin^c$ spinor bundle

M ... 3-D Riemannovská varieta

Ψ 2-dimenzionální komplexní vektorový bundle nad M
se skalárním součinem
a izometrií $\sigma : T^*M \to \Psi^{(2)}$, kde

$\Psi^{(2)} := \{A \in \mathrm{End}(\Psi) \mid A = A^*, \mathrm{Tr} A = 0\}$

$Spin^c$ spinor bundle

$M \ldots$ 3-D Riemannovská varieta

Ψ 2-dimenzionální komplexní vektorový bundle nad M
se skalárním součinem
a izometrií $\sigma : T^*M \to \Psi^{(2)}$, kde

$$\Psi^{(2)} := \{A \in \mathrm{End}(\Psi) \mid A = A^*, \mathrm{Tr}A = 0\}$$

Skalární součin na $\Psi^{(2)}$
$(A, B) \coloneqq \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[AB]$
$\{\sigma(\alpha), \sigma(\beta)\} = 2(\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in T^*M$

$Spin^c$ konexe

$\forall X \in T_* M$ a $\xi, \eta \in \Gamma(\Psi)$

$$X(\xi,\eta) = (\nabla_X \xi, \eta) + (\xi, \nabla_X \eta)$$
$$[\nabla_X, \sigma(\alpha)] = \sigma(\nabla_X \alpha)$$

Lokální vyjádření ∇_X

$\xi_\pm \ldots$ lokální ONB spinorů
$(e_1, e_2, e_3) \ldots$ ONB na M
Pak

$$(\nabla_X)_{\xi_\pm} = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} (e_1, \nabla_X e_2) & -(e_3, \nabla_X e_2) - \mathrm{i}(e_3, \nabla_X e_1) \\ -(e_3, \nabla_X e_2) + \mathrm{i}(e_3, \nabla_X e_1) & (e_1, \nabla_X e_2) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{i}}{2}\alpha(X) I\,,$$

kde reálná 1-forma $\alpha(X) = \mathrm{i}\frac{1}{2}(\xi_+, \nabla_X \xi_+) + \mathrm{i}\frac{1}{2}(\xi_-, \nabla_X \xi_-)$.

Magnetická 2-forma

$$\beta(X, Y) := \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}[\mathcal{R}_\Psi(X, Y)]$$

kde tenzor křivosti je dán vztahem

$$\mathcal{R}_\Psi(X, Y)\xi := \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$$

Magnetická 2-forma

$$\beta(X,Y) := \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{Tr}[\mathcal{R}_\Psi(X,Y)]$$

kde tenzor křivosti je dán vztahem

$$\mathcal{R}_\Psi(X,Y)\xi := \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi$$

Tvrzení

Lokálně platí $\beta = \mathrm{d}\alpha$.

D. Krejčiřík, N. Raymond, M. Tušek, *The magnetic Laplacian in shrinking tubular neighbourhoods of hypersurfaces*, J. Geom. Anal. 25 (2015), 2546-2564

Diracův operátor

$\mathcal{D} : \Gamma(\Psi) \to \Gamma(\Psi)$

$$\mathcal{D}\xi := -\mathrm{i} \sum_j \sigma(e^j) \nabla_{e_j} \xi$$

Věta ($\mathcal{D}$ je symetrický operátor)

Nechť ξ, η jsou spinorová pole, pak

$$\int_M (\xi, \mathcal{D}\eta) = \int_M (\mathcal{D}\xi, \eta)$$

QMATH

Konformní transformace

M . . . metrika g, Cliffordovo násobení σ
nová metrika $g_\Omega = \Omega^2 g$
nové Cliffordovo násobení $\sigma_\Omega = \Omega^{-1}\sigma$

Změna *spin*^{c} konexe na Ψ

$$\nabla_X^{(\Omega)} = \nabla_X + \frac{1}{4}\Omega^{-1}[\sigma(X^*), \sigma(\mathrm{d}\Omega)]$$

Konformní transformace

$M \ldots$ metrika g, Cliffordovo násobení σ
nová metrika $g_\Omega = \Omega^2 g$
nové Cliffordovo násobení $\sigma_\Omega = \Omega^{-1}\sigma$

Změna Diracova operátoru na Ψ

$$\mathcal{D}_\Omega = \begin{cases} \Omega^{-\frac{3}{2}}\mathcal{D}\Omega^{\frac{1}{2}}\,, & \text{ve 2D} \\ \Omega^{-2}\mathcal{D}\Omega\,, & \text{ve 3D} \end{cases}$$

Riemannian submersion

$\phi : M \to N$
$\phi_* : T_*M \to T_*N$ je částečná surjektivní izometrie
Zdvih *spin*^{c} spinor bundlu
$\Psi_N \xrightarrow{\pi} N \dots \sigma_N$

$$\Psi_M = \phi^*(\Psi_N) := \{(p, m) \in M \times \Psi_N \mid \pi(v) = \phi(p)\}$$

je *spin*^{c} spinor bundle nad M s Cliffordovým násobením
$\sigma_M(\phi^*\omega) = \sigma_N(\omega) \circ \phi$, $\forall \omega \in T^*N$
$\nu := *\phi^*(\mathrm{vol}_N)$
$\sigma_M(\nu) = -(\mathrm{i}\sigma_N(f_1)\sigma_N(f_2)) \circ \phi$, kde
f_1, f_2 je ON frame T^*N

Riemannian submersion

$\phi : M \to N$

$\phi_* : T_*M \to T_*N$ je částečná surjektivní izometrie

$$\Psi_M = \phi^*(\Psi_N) \coloneqq \{(p, m) \in m \times \Psi_N \mid \pi(v) = \phi(p)\}$$

Zdvih *spin*^{c} konexe

$$\nabla^M_X \coloneqq \phi^*(\nabla^N)_X - \frac{1}{2}\sigma_M(\nu)\sigma_M(\nabla^M_X \nu) - \mathrm{i}\nu(X)(\nu, *\mathrm{d}\nu)\sigma_M(\nu)$$

Zdvih magnetické 2-formy

$\beta_M = \phi^* \beta_N$

Zdvih Diracova operátoru

$$\mathcal{D}_M(\xi \circ \phi) = (\mathcal{D}_N \xi) \circ \phi + \frac{1}{2}\sigma_M(*\mathrm{d}\nu - \frac{1}{2}(\nu, *\mathrm{d}\nu)\nu)\sigma_M(\nu)\xi \circ \phi$$

Věta

Definujeme-li novou spin^c konexi

$$\nabla^{M,\pm} := \nabla^M \mp \frac{\mathrm{i}}{2}(*\mathrm{d}\nu - \frac{1}{2}(\nu, *\mathrm{d}\nu)\nu)\,,$$

kde ∇_M je odpovídající zdvih ∇_N pomocí ϕ, je odpovídající Diracův operátor tvaru

$$\mathcal{D}_M^{\pm}(\xi \circ \phi) = (\mathcal{D}_N \xi) \circ \phi$$

pro spinory splňující $\sigma_M(\nu)\xi \circ \phi = \pm\xi \circ \phi$. Specielně pro $\xi \in \Psi_N$ nulové módy $\mathcal{D}_N$ se spinem

$$S = (\xi, -\mathrm{i}\sigma_N(f^1)\sigma_N(f^2)\xi) \in \{+,-\}\,,$$

je $\xi \circ \phi \in \Psi_M$ nulový mód $\mathcal{D}_M^{sgn(S)}$.

Věta (Spodní odhad na počet nulových módů)

Nechť Ψ_N *je spinor bundle nad 2-dimenzionální varietou* N*,* ∇^N *spin*^{c} *konexe a* $\mathcal{D}_N$ *Diracův operátor. Označme* β_N *příslušnou magnetickou 2-formu. Nechť*

$$\Phi := \frac{1}{2\pi}\int_N \beta_N \quad a \quad s := sgn(\Phi) \in \{+,-\}$$

Uvažujme Riemannovské ponoření $\phi : M \to N$ *z 3-dimenzionální variety* M *a* Ψ_M*,* ∇^M *příslušné zdvihy spinor bundlu a spin*^{c} *konexe. Nechť* $\nu := *\phi^*(vol_N)$ *a definujme spin*^{c} *konexi*

$$\tilde{\nabla}^{M,\pm} := \nabla^M - \mathrm{i}\frac{s}{2}\left(*\mathrm{d}\nu - \frac{1}{2}(\nu, *\mathrm{d}\nu)\nu\right),$$

na Ψ_M*. Pak pro odpovídající Diracův operátor platí*

$$dim\, ker\tilde{\mathcal{D}}_M \geqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_N \beta_N\right| .$$

Děkuji za pozornost

Věta (Aharonov Casher na $\mathbb{S}^2$)

Nechť ∇ je konexe na spin^c bundlu Ψ_n nad $\mathbb{S}^2$ s Chernovým číslem $n = \frac{1}{2\pi}\int \beta$, kde β je odpovídající 2-forma. Nechť $\mathcal{D}$ je odpovídající Diracův operátor. Pak $\dim \ker \mathcal{D} = |n|$. Navíc
$\ker D \subset \{\eta \mid \sigma(\nu)\eta = \eta\}$ pokud $n > 0$ a
$\ker \mathcal{D} \subset \{\eta \mid \sigma(\nu)\eta = -\eta\}$ pokud $n < 0$.

Věta (Nulové módy na $\mathbb{R}^3$)

Buď $\tau : \mathbb{R}^3 \to M\backslash\{p\}$ *stereografická projekce na* $\mathbb{R}^3$ *z* $M = (\mathbb{S}^3, g_3)$ *bez jednoho bodu. Nechť* $\beta = \tau^*(h * \nu) = (h \circ \tau)\tau^*(*\nu)$ *je pullback libovolné uzavřené 2-formy* $h * \nu$ *na* $\mathbb{S}^3$.
Pak $h = g \circ \phi$ *pro nějakou* $g \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$ *a* $(\tau^{-1}) * \beta$ *lze rozšířit na 2-formu* $\beta_M = (g \circ \phi) * \nu$ *na* M*. Nechť* $\mathcal{D}_{\mathbb{R}^3}$ *je Diracův operátor na* $\mathbb{R}^3$ *s magnetickou 2-formou* β *a* $\mathcal{D}_M$ *je Diracův operátor na* M *s magnetickou 2-formou* β_M*. Pak* $\dim\ker \mathcal{D} = \dim\ker \mathcal{D}_M$