Poruchová teorie pro lineární operátory na prostorech konečné dimenze

Hana Dlouhá

FJFI ČVUT

21. srpna 2015

Obsah:

- Vektorový prostor X konečné dimenze
- Malá porucha lineárního operátoru T:

$$T(\kappa) = T + \kappa T^{'} \tag{1}$$

- Vektorový prostor X konečné dimenze
- Malá porucha lineárního operátoru T:

$$T(\kappa) = T + \kappa T^{'} \tag{1}$$

- $T(0) = T$ nezměněný operátor
- $\kappa T^{'}$ porucha

- Vektorový prostor X konečné dimenze
- Malá porucha lineárního operátoru T:

$$T(\kappa) = T + \kappa T^{'} \tag{1}$$

- $T(0) = T$ nezměněný operátor
- $\kappa T^{'}$ porucha
- Rovnice (1) se dá generalizovat na tvar:

$$T(\kappa) = T + \kappa T^{(1)} + \kappa^2 T^{(2)} + \dots \tag{2}$$

- Vlastní čísla splňují:

$$det(T(\kappa) - \xi) = 0 \tag{3}$$

- Vlastní čísla splňují:

$$det(T(\kappa) - \xi) = 0 \tag{3}$$

- Což je algebraická rovnice v ξ stupně $N = dimX$ s koeficienty holomorvními v κ

- Vlastní čísla splňují:

$$det(T(\kappa) - \xi) = 0 \tag{3}$$

- Což je algebraická rovnice v ξ stupně $N = dimX$ s koeficienty holomorvními v κ
- Kořeny (3) tvoří jednu, či více větví jedné, či více analytických funkcí s pouze algebraickými singularitami

- Vlastní čísla splňují:

$$det(T(\kappa) - \xi) = 0 \tag{3}$$

- Což je algebraická rovnice v ξ stupně $N = dimX$ s koeficienty holomorvními v κ
- Kořeny (3) tvoří jednu, či více větví jedné, či více analytických funkcí s pouze algebraickými singularitami
- Počet vlastních čísel $T(\kappa) = s$ je konstantní (nezávislý na κ) až na kritické body

Rozdělení podle počtu vlastních čísel

- $s = N = dimX$ pokud jsou všechny funkce různé – $T(\kappa)$ je prostý, a tedy diagonizovatelný pro všechny nekritické body
- $s < N$ pokud jsou alespoň dvě funkce identické – $T(\kappa)$ je trvale poškozena

Příklady I

1. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ má charakteristickou rovnici $\xi^2 - \kappa^2 = 0$; vlastní hodnoty $\pm\kappa$ a jeden kriritcký bod $\kappa = 0$

Příklady I

1. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ má charakteristickou rovnici $\xi^2 - \kappa^2 = 0$; vlastní hodnoty $\pm\kappa$ a jeden kriritcký bod $\kappa = 0$
2. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pouze jedna vlastní hodnota 0 pro všechna κ (dvě identické funkce) - $T(\kappa)$ je trvale poškozena. Bez kritických bodů.

Příklady I

1. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ má charakteristickou rovnici $\xi^2 - \kappa^2 = 0$; vlastní hodnoty $\pm\kappa$ a jeden kriritcký bod $\kappa = 0$
2. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pouze jedna vlastní hodnota 0 pro všechna κ (dvě identické funkce) - $T(\kappa)$ je trvale poškozena. Bez kritických bodů.
3. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$ má charakteristickou rovnici $\xi^2 - \kappa = 0$ - vlastní hodnoty $\pm\kappa^{\frac{1}{2}}$ tvoří dvě větve jedné analytické funkce $\kappa^{\frac{1}{2}}$. Jeden kritický bod $\kappa = 0$

Příklady II

4. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & -1 \end{pmatrix}$ Vlastní čísla jsou $\lambda_{\pm}(\kappa) = \pm(1+\kappa^2)^{\frac{1}{2}}$ s kritickými body $\kappa = \pm i$

Chování vlastních čísel v okolí kritických bodů

- Omezíme se na jednoduše souvislou oblast

Chování vlastních čísel v okolí kritických bodů

- Omezíme se na jednoduše souvislou oblast
- Vlastní čísla $T(\kappa)$ zapíšeme jako s funkcí:

$$\lambda_1(\kappa), \lambda_2(\kappa), \ldots, \lambda_s(\kappa) \tag{4}$$

Chování vlastních čísel v okolí kritických bodů

- Omezíme se na jednoduše souvislou oblast
- Vlastní čísla $T(\kappa)$ zapíšeme jako s funkcí:

$$\lambda_1(\kappa), \lambda_2(\kappa), \ldots, \lambda_s(\kappa) \tag{4}$$

- BÚNO $\kappa = 0$ – kritický bod

Chování vlastních čísel v okolí kritických bodů

- Omezíme se na jednoduše souvislou oblast
- Vlastní čísla $T(\kappa)$ zapíšeme jako s funkcí:

$$\lambda_1(\kappa), \lambda_2(\kappa), \ldots, \lambda_s(\kappa) \tag{4}$$

- BÚNO $\kappa = 0$ – kritický bod
- Buď D malý kruh okolo $\kappa = 0$, bez $\kappa = 0$ a otáčíme jím okolo $\kappa = 0$

Chování vlastních čísel v okolí kritických bodů

- Omezíme se na jednoduše souvislou oblast
- Vlastní čísla $T(\kappa)$ zapíšeme jako s funkcí:

$$\lambda_1(\kappa), \lambda_2(\kappa), \ldots, \lambda_s(\kappa) \tag{4}$$

- BÚNO $\kappa = 0$ – kritický bod
- Buď D malý kruh okolo $\kappa = 0$, bez $\kappa = 0$ a otáčíme jím okolo $\kappa = 0$
- Konstruujeme analytické prodloužení funkcí - projdou permutací mezi sebou

Rozřazení funkcí do cyklů

$\{\lambda_1(\kappa), \ldots \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \ldots$
Kde:

- Každá skupina = cyklus vznikne cyklickou permutací při otočení D okolo $\kappa = 0$

Rozřazení funkcí do cyklů

$\{\lambda_1(\kappa), \ldots \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \ldots$
Kde:

- Každá skupina = cyklus vznikne cyklickou permutací při otočení D okolo $\kappa = 0$
- Počet členů cyklu = perioda

Rozřazení funkcí do cyklů

$\{\lambda_1(\kappa), \ldots \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \ldots$

Kde:

- Každá skupina = cyklus vznikne cyklickou permutací při otočení D okolo $\kappa = 0$
- Počet členů cyklu = perioda
- Členy cyklu s periodou p tvoří větev analytické funkce s větvícím bodem (pro $p > 1$) v $\kappa = 0$

Rozřazení funkcí do cyklů

$\{\lambda_1(\kappa), \ldots \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \ldots$
Kde:

- Každá skupina = cyklus vznikne cyklickou permutací při otočení D okolo $\kappa = 0$
- Počet členů cyklu = perioda
- Členy cyklu s periodou p tvoří větev analytické funkce s větvícím bodem (pro $p > 1$) v $\kappa = 0$
- Obecně zde může být několik kruhů s centrem λ

Rozřazení funkcí do cyklů

$\{\lambda_1(\kappa), \ldots \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \ldots$
Kde:

- Každá skupina = cyklus vznikne cyklickou permutací při otočení D okolo $\kappa = 0$
- Počet členů cyklu = perioda
- Členy cyklu s periodou p tvoří větev analytické funkce s větvícím bodem (pro $p > 1$) v $\kappa = 0$
- Obecně zde může být několik kruhů s centrem λ
- Všechna vlastní čísla příslušné jednomu kruhu pocházejí z nepoškozeného vlastního čísla λ dělením v $\kappa = 0$

Rozřazení funkcí do cyklů

$\{\lambda_1(\kappa), \dots \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \dots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \dots$
Kde:

- Každá skupina = cyklus vznikne cyklickou permutací při otočení D okolo $\kappa = 0$
- Počet členů cyklu = perioda
- Členy cyklu s periodou p tvoří větev analytické funkce s větvícím bodem (pro $p > 1$) v $\kappa = 0$
- Obecně zde může být několik kruhů s centrem λ
- Všechna vlastní čísla příslušné jednomu kruhu pocházejí z nepoškozeného vlastního čísla λ dělením v $\kappa = 0$
- λ-grupa

Rozřazení funkcí do cyklů

$\{\lambda_1(\kappa), \ldots \lambda_p(\kappa)\}, \{\lambda_{p+1}(\kappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\kappa)\}, \ldots$

Kde:

- Každá skupina = cyklus vznikne cyklickou permutací při otočení D okolo $\kappa = 0$
- Počet členů cyklu = perioda
- Členy cyklu s periodou p tvoří větev analytické funkce s větvícím bodem (pro $p > 1$) v $\kappa = 0$
- Obecně zde může být několik kruhů s centrem λ
- Všechna vlastní čísla příslušné jednomu kruhu pocházejí z nepoškozeného vlastního čísla λ dělením v $\kappa = 0$
- λ-grupa
- Kritický bod nemusí být větvícím bodem (všechny kruhy mohou mít periodu 1), pak se tam ale shodují dvě vlastní čísla rozdílná pro $\kappa \neq \kappa_0$ (dochází ke křížení)

Puiseuxova řada

Puiseuxova řada

Funkci $\lambda_h(\kappa)$ rozepíšeme do Puiseuxovy řady:

$$\lambda_h(\kappa) = \lambda + \alpha_1 \omega^h \kappa^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 \omega^{2h} \kappa^{\frac{2}{p}} + \dots \tag{5}$$

pro $h = 0, 1, \dots, p-1$, kde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$

Puiseuxova řada

Puiseuxova řada

Funkci $\lambda_h(\kappa)$ rozepíšeme do Puiseuxovy řady:

$$\lambda_h(\kappa) = \lambda + \alpha_1 \omega^h \kappa^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 \omega^{2h} \kappa^{\frac{2}{p}} + \dots \tag{5}$$

pro $h = 0, 1, \dots, p-1$, kde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$

- Z (5) je vidět, že $|\lambda_h(\kappa) - \lambda|$ je obecně řádu $|x|^{\frac{1}{p}}$ pro malá $|x|$ - pro $p \geq 2$ je řád změny vlastního čísla v kritickém bodě **mnohonásobně vyšší** v porovnání se změnou $T(\kappa)$!!!

Puiseuxova řada

Puiseuxova řada

Funkci $\lambda_h(\kappa)$ rozepíšeme do Puiseuxovy řady:

$$\lambda_h(\kappa) = \lambda + \alpha_1 \omega^h \kappa^{\frac{1}{p}} + \alpha_2 \omega^{2h} \kappa^{\frac{2}{p}} + \dots \tag{5}$$

pro $h = 0, 1, \dots, p-1$, kde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$

- Z (5) je vidět, že $|\lambda_h(\kappa) - \lambda|$ je obecně řádu $|x|^{\frac{1}{p}}$ pro malá $|x|$ - pro $p \geq 2$ je řád změny vlastního čísla v kritickém bodě **mnohonásobně vyšší** v porovnání se změnou $T(\kappa)$!!!
- Suma $\lambda_h(\kappa)$ příslušející jednomu cyklu je holomorfní v kritickém bodě

Příklady

1. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$; vlastní hodnoty $\pm\kappa$ a jeden kriritcký bod $\kappa = 0$. Tvoří dva cykly s periodou 1 v $\kappa = 0$

Příklady

1. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$; vlastní hodnoty $\pm\kappa$ a jeden kriritcký bod $\kappa = 0$. Tvoří dva cykly s periodou 1 v $\kappa = 0$
2. nemá kritické body

Příklady

1. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$; vlastní hodnoty $\pm\kappa$ a jeden kriritcký bod $\kappa = 0$. Tvoří dva cykly s periodou 1 v $\kappa = 0$
2. nemá kritické body
3. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$; vlastní hodnoty $\pm\kappa^{\frac{1}{2}}$ tvoří dvě větve jedné analytické funkce $\kappa^{\frac{1}{2}}$. Jeden kritický bod $\kappa = 0$ – je zde tedy jeden cyklus s periodou 2 v kritickém bodě $\kappa = 0$

Příklady

1. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$; vlastní hodnoty $\pm\kappa$ a jeden kriritcký bod $\kappa = 0$. Tvoří dva cykly s periodou 1 v $\kappa = 0$
2. nemá kritické body
3. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}$; vlastní hodnoty $\pm\kappa^{\frac{1}{2}}$ tvoří dvě větve jedné analytické funkce $\kappa^{\frac{1}{2}}$. Jeden kritický bod $\kappa = 0$ – je zde tedy jeden cyklus s periodou 2 v kritickém bodě $\kappa = 0$
4. $T(\kappa) = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ \kappa & -1 \end{pmatrix}$ Vlastní čísla jsou $\lambda_{\pm}(\kappa) = \pm(1+\kappa^2)^{\frac{1}{2}}$ s kritickými body $\kappa = \pm i$ – to znamená jeden cyklus s periodou 2 v obou kritických bodech

Definition

Resolventa

$$R(\xi, \kappa) = (T(\kappa) - \xi)^{-1} \tag{6}$$

Theorem (1)

$R(\xi, \kappa)$ je holomorfní v proměnných ξ a κ v každé oblasti v které $\xi \neq$ vlastnímu číslu $T(\kappa)$

Theorem (2)

Pokud ve větě (1) zvolíme pevné ξ, tak buď a) $R(\xi,\kappa)$ neexistuje pro žádné $\kappa \in D_0$, nebo b) $R(\xi,\kappa)$ je meromorfní v $\kappa \in D_0$ (existuje pro všechna κ až na izolované body).

Theorem (2)

Pokud ve větě (1) zvolíme pevné ξ, tak buď a) $R(\xi,\kappa)$ neexistuje pro žádné $\kappa \in D_0$, nebo b) $R(\xi,\kappa)$ je meromorfní v $\kappa \in D_0$ (existuje pro všechna κ až na izolované body).

Důkaz.

Buď je $\det(T(\kappa)-\xi)=0$ identicky v κ – tedy máme případ a). A nebo vyplývá b) z maticové reprezentace $R(\xi,\kappa)$ (výpočet inverze pomocí adjungované matice) $\square$

Příklady

1. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & \kappa \\ \kappa & -\xi \end{pmatrix}$; $R(\xi, \kappa) = \frac{1}{\xi^2 - \kappa^2} \begin{pmatrix} -\xi & -\kappa \\ -\kappa & -\xi \end{pmatrix}$;

Příklady

1. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & \kappa \\ \kappa & -\xi \end{pmatrix}$; $R(\xi, \kappa) = \frac{1}{\xi^2 - \kappa^2} \begin{pmatrix} -\xi & -\kappa \\ -\kappa & -\xi \end{pmatrix}$;
2. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & \kappa \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}$ $R(\xi, \kappa)$ neexistuje

Příklady

1. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & \kappa \\ \kappa & -\xi \end{pmatrix}$; $R(\xi, \kappa) = \frac{1}{\xi^2 - \kappa^2} \begin{pmatrix} -\xi & -\kappa \\ -\kappa & -\xi \end{pmatrix}$;
2. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & \kappa \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}$ $R(\xi, \kappa)$ neexistuje
3. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & 1 \\ \kappa & -\xi \end{pmatrix}$; $R(\xi, \kappa) = \frac{1}{\xi^2 - \kappa} \begin{pmatrix} -\xi & -1 \\ -\kappa & -\xi \end{pmatrix}$

Příklady

1. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & \kappa \\ \kappa & -\xi \end{pmatrix}$; $R(\xi, \kappa) = \frac{1}{\xi^2 - \kappa^2} \begin{pmatrix} -\xi & -\kappa \\ -\kappa & -\xi \end{pmatrix}$;
2. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & \kappa \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}$ $R(\xi, \kappa)$ neexistuje
3. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} -\xi & 1 \\ \kappa & -\xi \end{pmatrix}$; $R(\xi, \kappa) = \frac{1}{\xi^2 - \kappa} \begin{pmatrix} -\xi & -1 \\ -\kappa & -\xi \end{pmatrix}$
4. $T(\kappa) - \xi = \begin{pmatrix} 1 - \xi & \kappa \\ \kappa & -1 - \xi \end{pmatrix}$

   $R(\xi, \kappa) = \frac{1}{\xi^2 - 1 - \kappa^2} \begin{pmatrix} -1 - \xi & -\kappa \\ -\kappa & 1 - \xi \end{pmatrix}$

Děkuji za pozornost.