Nodální čáry na omezených dvourozměrných oblastech

Marie Fialová[1]
Školitel: Ing. Matěj Tušek[2], Ph.D.
Konzultant: Ing. Tomáš Kalvoda[3], Ph.D.

[1]Katedra fyziky, FJFI ČVUT v Praze
[2]Katedra matematiky, FJFI ČVUT v Praze
[3]Katedra aplikované matematiky, FIT ČVUT v Praze

20. srpna 2015

1. Úvod
2. Teorie
   - Zavedení laplaciánu jako samosdruženého operátoru
   - Nodální hypotéza
   - Analytické řešení
3. Numerika
4. Porovnání analytických a numerických výsledků

Dirichletův Laplacián

$$Hf := -\Delta f = -\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

$\mathrm{Dom}(H) = C_0^\infty(\overline{\Omega})$
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast, $\partial\Omega \in C^\infty$

Úloha

$$\begin{aligned} Hf &= \lambda f && \text{v } \Omega, \\ f &= 0 && \text{na } \partial\Omega, \end{aligned}$$

$\forall f \in \mathrm{Dom}(H)$

Lineární operátory

- Uvažujeme lineární operátor A na $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$

Lineární operátory

- Uvažujeme lineární operátor A na $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$
- $\overline{\mathrm{Dom}(A)} = \mathscr{H} = L^2(\Omega)$

Lineární operátory

- Uvažujeme lineární operátor A na $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$
- $\overline{\mathrm{Dom}(A)} = \mathscr{H} = L^2(\Omega)$
- $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} | x \in \mathrm{Dom}(A)\}$

Lineární operátory

- Uvažujeme lineární operátor A na $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$
- $\overline{\mathrm{Dom}(A)} = \mathscr{H} = L^2(\Omega)$
- $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} | x \in \mathrm{Dom}(A)\}$

Definice (Uzavřený)

$$\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)}$$

na $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$

Lineární operátory

- Uvažujeme lineární operátor A na $\mathscr{H} = L^2(\Omega)$
- $\overline{\mathrm{Dom}(A)} = \mathscr{H} = L^2(\Omega)$
- $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} | x \in \mathrm{Dom}(A)\}$

Definice (Uzavřený)

$$\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)}$$

na $\mathscr{H} \oplus \mathscr{H}$

Definice (Uzavíratelný)

$$\exists \tilde{A} \supset A,\ \tilde{A} = \bar{\tilde{A}}$$

Lineární operátory

Definice (Pozitivní)

$$\langle Af, f \rangle \geq 0$$

$\forall f \in \mathrm{Dom}(A)$

Lineární operátory

Definice (Pozitivní)

$$\langle Af, f \rangle \geq 0$$

$\forall f \in \mathrm{Dom}(A)$

Definice (Zdola omezený)

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathrm{Dom}(A), \langle Af, f \rangle \geq M\|f\|^2$$

Lineární operátory

Definice (Sdružený operátor)

$g \in \mathrm{Dom}(A^*) \Leftrightarrow \exists g^* \in \mathscr{H}, \forall f \in \mathrm{Dom}(A),\ \langle g, Af \rangle = \langle g^*, f \rangle.$
Klademe $A^* g := g^*$.

Lineární operátory

Definice (Sdružený operátor)

$g \in \mathrm{Dom}(A^*) \Leftrightarrow \exists g^* \in \mathscr{H}, \forall f \in \mathrm{Dom}(A), \langle g, Af \rangle = \langle g^*, f \rangle.$
Klademe $A^* g := g^*.$

Definice (Symetrický operátor)

A- hustě definovaný

$$A \subset A^*$$

Lineární operátory

Definice (Sdružený operátor)

$g \in \mathrm{Dom}(A^*) \Leftrightarrow \exists g^* \in \mathscr{H}, \forall f \in \mathrm{Dom}(A),\ \langle g, Af \rangle = \langle g^*, f \rangle.$
Klademe $A^* g := g^*$.

Definice (Symetrický operátor)

A- hustě definovaný

$$A \subset A^*$$

Definice (Samosdružený operátor)

$$A = A^*$$

Spektrum uzavřeného operátoru

Definice (Spektrum)

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\, A - \lambda : \mathrm{Dom}(A) \to \mathscr{H} \text{ \textit{není bijekce} } \}$$

Spektrum uzavřeného operátoru

Definice (Spektrum)

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\, A - \lambda : \mathrm{Dom}(A) \to \mathscr{H} \ \textit{není bijekce}\ \}$$

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \,\dot{\cup}\, \sigma_{disc}(A)$$

Spektrum uzavřeného operátoru

Definice (Spektrum)

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\, A - \lambda : \mathrm{Dom}(A) \to \mathscr{H} \ \textit{není bijekce}\ \}$$

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) \,\dot{\cup}\, \sigma_{disc}(A)$$

Definice (Rezolventa)

$$R_\mu := (A - \mu)^{-1},$$

kde $\mu \in \rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$

Spektrum samosdruženého operátoru

Věta

A- samosdružený, pozitivní $\Rightarrow$ *následující výroky jsou ekvivalentní*

1. *A má kompaktní rezolventu* $(A+1)^{-1}$,
2. $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$,
3. *existuje ortonormální báze* $\mathscr{H}$ *z vlastních vektorů A.*

Kvadratické formy

- Kvadratická forma $q: \mathrm{Dom}(q) \times \mathrm{Dom}(q) \to \mathbb{C}$

Kvadratické formy

- Kvadratická forma $q : \mathrm{Dom}(q) \times \mathrm{Dom}(q) \to \mathbb{C}$
- $\overline{\mathrm{Dom}(q)} = \mathscr{H}$

Kvadratické formy

- Kvadratická forma $q: \mathrm{Dom}(q) \times \mathrm{Dom}(q) \to \mathbb{C}$
- $\overline{\mathrm{Dom}(q)} = \mathscr{H}$

Definice (Symetrická)

$$q(f, g) = \overline{q(g, f)}, \forall f, g \in \mathrm{Dom}(q)$$

Kvadratické formy

- Kvadratická forma $q: \mathrm{Dom}(q) \times \mathrm{Dom}(q) \to \mathbb{C}$
- $\overline{\mathrm{Dom}(q)} = \mathscr{H}$

Definice (Symetrická)

$$q(f, g) = \overline{q(g, f)}, \forall f, g \in \mathrm{Dom}(q)$$

Definice (Pozitivní)

$$q(f, f) \geq 0, \forall f \in \mathrm{Dom}(q)$$

Definice (Zdola omezená)

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathrm{Dom}(q),\ q(f, f) \geq m\|f\|^2$$

Definice (Zdola omezená)

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathrm{Dom}(q),\ q(f,f) \geq m\|f\|^2$$

Skalární součin na $\mathrm{Dom}(q)$

q- hustě definovaná, symetrická, zdola omezená kvadratická forma

$$\langle f, g\rangle_q := \langle f, g\rangle + (1-m)\, q(f,g)$$

Definice (Zdola omezená)

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathrm{Dom}(q),\ q(f,f) \geq m\|f\|^2$$

Skalární součin na $\mathrm{Dom}(q)$

q- hustě definovaná, symetrická, zdola omezená kvadratická forma

$$\langle f,g\rangle_q := \langle f,g\rangle + (1-m)\,q(f,g)$$

Definice (Uzavřená forma)

$$\left(\mathrm{Dom}(q), \langle\cdot,\cdot\rangle_q\right)$$

je Hilbertův prostor.

Definice (Zdola omezená)

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall f \in \mathrm{Dom}(q),\ q(f,f) \geq m\|f\|^2$$

Skalární součin na $\mathrm{Dom}(q)$

q- hustě definovaná, symetrická, zdola omezená kvadratická forma

$$\langle f,g\rangle_q := \langle f,g\rangle + (1-m)\,q(f,g)$$

Definice (Uzavřená forma)

$$\left(\mathrm{Dom}(q), \langle\cdot,\cdot\rangle_q\right)$$

je Hilbertův prostor.

Definice (Uzavíratelná forma)

$$\exists \tilde{q} \supset q,\ \tilde{q} = \overline{\tilde{q}}$$

Přiřazení operátoru a formy

Lineární operátor A

- symetrický
- zdola omezený

$\longrightarrow$

Kvadratická forma q

- hustě definovaná
- symetrická
- zdola omezená
- uzavírtelná

$$q(f,g) := \langle f, Ag \rangle, \quad \forall f,g \in \mathrm{Dom}(A)$$

[D. Krejčiřík- Geometrical aspects of spectral theory, 2015]

Přiřazení operátoru a formy

Kvadratická forma q

- hustě definovaná
- symetrická
- zdola omezená
- uzavřená

$$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$$

Lineární operátor A

- samosdružený
- zdola omezený

Přiřazení operátoru a formy

Kvadratická forma q

- hustě definovaná
- symetrická
- zdola omezená
- uzavřená

$$\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$$

Lineární operátor A

- samosdružený
- zdola omezený

- $(\rightarrow)$: *Věta o reprezentaci*: q-splňuje dané předpoklady $\Rightarrow$ operátor A:

$$\mathrm{Dom}(A) := \{f \in \mathrm{Dom}(q) | \exists h \in \mathscr{H}, \forall g \in \mathrm{Dom}(q), q(g,f) = \langle g, h \rangle\}$$

$$Af := h$$

je samosdružený a zdola omezený.

[D. Krejčiřík- Geometrical aspects of spectral theory, 2015]

Kvadratická forma operátoru H

$$Q(f,g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$\mathrm{Dom}(Q) = C_0^\infty(\overline{\Omega})$, je uzavíratelná.
[E. Davies- Spectral Theory and Differential Operators, 1995]

Kvadratická forma operátoru H

$$Q(f,g) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle = \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial x_j}$$

$\mathrm{Dom}(Q) = C_0^\infty(\overline{\Omega})$, je uzavíratelná.
[E. Davies- Spectral Theory and Differential Operators, 1995]

Forma samosdruženého operátoru

Uzávěr formy Q je forma pozitivního samosdruženého operátoru $\tilde{H}$: $H \subset \tilde{H}$.
[E. Davies- Spectral Theory and Differential Operators, 1995]

Definiční obor $\tilde{H}$

Definice (Sobolevův prostor)

$$W^{1,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) | \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ pro\ i = 1, 2\}$$

Definiční obor $\tilde{H}$

Definice (Sobolevův prostor)

$$W^{1,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) | \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \ \ pro \ i = 1, 2\}$$

Skalární součin na $W^{1,2}(\Omega)$

$$\langle f, g \rangle_\nabla := \int_\Omega \left(f(x)\overline{g(x)} + \nabla f(x)\overline{\nabla g(x)} \right) \mathrm{d}^2 x.$$

Definiční obor $\tilde{H}$

Definice (Sobolevův podprostor)

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\overline{\Omega})}$$

Definiční obor $\tilde{H}$

Definice (Sobolevův podprostor)

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\overline{\Omega})}$$

Věta

$$\mathrm{Dom}(\overline{Q}) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

[E. Davies- Spectral Theory and Differential Operators, 1995]

Definiční obor $\tilde{H}$

Definice (Sobolevův podprostor)

$$W_0^{1,2}(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\overline{\Omega})}$$

Věta

$$\mathrm{Dom}(\overline{Q}) = W_0^{1,2}(\Omega)$$

[E. Davies- Spectral Theory and Differential Operators, 1995]

Pro Ω- omezená oblast, alespoň C^2:

$\mathrm{Dom}(\tilde{H}) = W^{2,2}(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) |\, D^\alpha f \in L^2(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq 2\}$

Max-min

- A- samosdružený operátor, zdola omezený
- q- kvadratická forma operátoru A
- $n \in \mathbb{N}$

Max-min

- A- samosdružený operátor, zdola omezený
- q- kvadratická forma operátoru A
- $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_n(A) := \sup_{\substack{\mathcal{L} \subset\subset \mathscr{H} \\ \dim(\mathcal{L}) = n-1}} \ \inf_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in \mathcal{L}^{\perp} \cap \mathrm{Dom}(q)}} q(f,f)$$

$$\lambda_\infty := \lim_{n \to \infty} \lambda_n$$

Max-min

- A- samosdružený operátor, zdola omezený
- q- kvadratická forma operátoru A
- $n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_n(A) := \sup_{\substack{\mathcal{L} \subset\subset \mathscr{H} \\ \dim(\mathcal{L})=n-1}} \inf_{\substack{\|f\|=1 \\ f \in \mathcal{L}^\perp \cap \mathrm{Dom}(q)}} q(f,f)$$

$$\lambda_\infty := \lim_{n\to\infty} \lambda_n$$

- $\lambda_\infty = \inf \sigma_{ess}(A)$
  $\lambda_\infty = +\infty \Rightarrow \sigma_{ess}(A) = \emptyset$
- $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty} \cap (-\infty, \lambda_\infty) = \sigma_{disc}(A) \cap (-\infty, \lambda_\infty)$

[E. Davies- Spectral Theory and Differential Operators, 1995]

Max-min

Věta

Nechť A je zdola omezený samosdružený lineární operátor a q jeho kvadratická forma. Dále nechť $(g_1, \ldots, g_m) \in \mathrm{Dom}(q)$ *jsou libovolné lineárně nezávislé normalizované fce, J index první hodnoty* λ_n*, která není vlastní hodnotou a* $m < J$*.* $\Rightarrow$

$$\lambda_m = \max_{g_1,\ldots,g_{m-1}} \min\{q(g_m, g_m) \mid \langle g_m, g_i \rangle = 0,\ \forall i \in \widehat{m-1}\}.$$

[E.H. Lieb, M. Loss: Analysis, 2001]

Definice (Nodální množina)

Nechť f_2 je vlastní funkce, která přísluší vlastnímu číslu λ_2. Pak

$$\mathcal{N}(f_2) = f_2^{-1}(0)$$

nazvu **nodální množinou** *druhé vlastní funkce.*

Definice (Nodální množina)

Nechť f_2 je vlastní funkce, která přísluší vlastnímu číslu λ_2. Pak

$$\mathcal{N}(f_2) = f_2^{-1}(0)$$

nazvu **nodální množinou** *druhé vlastní funkce.*

Nodální Hypotéza

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$- omezená, jednoduše souvislá oblast $\Rightarrow$

$$\overline{\mathcal{N}(f_2)} \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

[D. Krejčiřík, M. Tušek- Nodal sets of thin curved layers, 2015]

Obdélník

- $-\Delta f = \lambda f$

Obdélník

- $-\Delta f = \lambda f$
- $\Omega = \{(x, y)|\ x \in (0, a) \wedge y \in (0, b),\ a, b > 0\}$

Obdélník

- $-\Delta f = \lambda f$
- $\Omega = \{(x, y)|\ x \in (0, a) \wedge y \in (0, b),\ a, b > 0\}$
- hraniční podmínka: $f(0, y) = f(x, 0) = f(a, y) = f(x, b) = 0$

Obdélník

- $-\Delta f = \lambda f$
- $\Omega = \{(x, y)|\ x \in (0, a) \wedge y \in (0, b),\ a, b > 0\}$
- hraniční podmínka: $f(0, y) = f(x, 0) = f(a, y) = f(x, b) = 0$
- separace proměnných: $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$

Obdélník

- $-\Delta f = \lambda f$
- $\Omega = \{(x,y)|\ x \in (0,a) \wedge y \in (0,b),\ a,b > 0\}$
- hraniční podmínka: $f(0,y) = f(x,0) = f(a,y) = f(x,b) = 0$
- separace proměnných: $f(x,y) = f_x(x) f_y(y)$
- hledáme řešení ve tvaru $f_x(x) = e^{kx} \Rightarrow$
  $k^2 + \lambda = 0 \xrightarrow{\text{hraniční podmínky}} \lambda_n = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}\right),\ n \in \mathbb{N}$

Obdélník

- $-\Delta f = \lambda f$
- $\Omega = \{(x,y)|\ x \in (0,a) \wedge y \in (0,b),\ a,b > 0\}$
- hraniční podmínka: $f(0,y) = f(x,0) = f(a,y) = f(x,b) = 0$
- separace proměnných: $f(x,y) = f_x(x)f_y(y)$
- hledáme řešení ve tvaru $f_x(x) = e^{kx} \Rightarrow$
  $k^2 + \lambda = 0 \xrightarrow{\text{hraniční podmínky}} \lambda_n = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2}\right),\ n \in \mathbb{N}$
- vlastní čísla: $\lambda_{n,m} = \lambda_n + \lambda_m = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), \quad m,n \in \mathbb{N}$

Obdélník

- $-\Delta f = \lambda f$
- $\Omega = \{(x, y)|\ x \in (0, a) \wedge y \in (0, b),\ a, b > 0\}$
- hraniční podmínka: $f(0, y) = f(x, 0) = f(a, y) = f(x, b) = 0$
- separace proměnných: $f(x, y) = f_x(x) f_y(y)$
- hledáme řešení ve tvaru $f_x(x) = e^{kx} \Rightarrow$
  $k^2 + \lambda = 0 \xrightarrow{\text{hraniční podmínky}} \lambda_n = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2}\right),\ n \in \mathbb{N}$
- vlastní čísla: $\lambda_{n,m} = \lambda_n + \lambda_m = \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), \quad m, n \in \mathbb{N}$
- vlastní funkce: $f_{n,m} = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad m, n \in \mathbb{N}$

Kruh o poloměru R

- převod do polárních souřadnic (r, θ):

$$\partial^2_{rr} v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v + \lambda v = 0$$

Kruh o poloměru R

- převod do polárních souřadnic (r, θ):

$$\partial^2_{rr} v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v + \lambda v = 0$$

- hraniční podmínka: $v(R, \theta) = 0$

Kruh o poloměru R

- převod do polárních souřadnic (r, θ):

$$\partial_{rr}^2 v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}^2 v + \lambda v = 0$$

- hraniční podmínka: $v(R, \theta) = 0$
- separace proměnných $v(r, \theta) = f(r)h(\theta)$:

$$\frac{r^2\left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \lambda f(r)\right)}{f(r)} = -\frac{h''(\theta)}{h(\theta)} = c \in \mathbb{R}$$

Kruh o poloměru R

- převod do polárních souřadnic (r,θ):

$$\partial^2_{rr} v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial^2_{\theta\theta} v + \lambda v = 0$$

- hraniční podmínka: $v(R,\theta) = 0$
- separace proměnných $v(r,\theta) = f(r)h(\theta)$:

$$\frac{r^2\left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + \lambda f(r)\right)}{f(r)} = -\frac{h''(\theta)}{h(\theta)} = c \in \mathbb{R}$$

- *úhlová část*: $h(\theta) = a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta)$, kde $n \in \mathbb{N}_0$, $n^2 = c$

Kruh o poloměru R

- *radiální část*: substituce
  $\rho = r\sqrt{\lambda}$, pro $\lambda \neq 0, f(r) = y(\rho(r)) \Rightarrow$ Besselova rovnice:
  $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)y = 0$

Kruh o poloměru R

- *radiální část*: substituce
  $\rho = r\sqrt{\lambda}$, pro $\lambda \neq 0, f(r) = y(\rho(r)) \Rightarrow$ Besselova rovnice:
  $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) y = 0$
- $\xrightarrow{\text{hraniční podmínky}} J_n(R\sqrt{\lambda})\, h(\theta) = 0$

Kruh o poloměru R

- *radiální část*: substituce
  $\rho = r\sqrt{\lambda}$, pro $\lambda \neq 0, f(r) = y(\rho(r)) \Rightarrow$ Besselova rovnice:
  $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)y = 0$
- $\xrightarrow{\text{hraniční podmínky}} J_n(R\sqrt{\lambda})\, h(\theta) = 0$
- vlastní čísla: $\lambda_{m,n} = \frac{k_{m,n}^2}{R^2}$
  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0,\ n^2 = c,\ k_{m,n} =$ m-tá nula n-té Besselovy funkce

Kruh o poloměru R

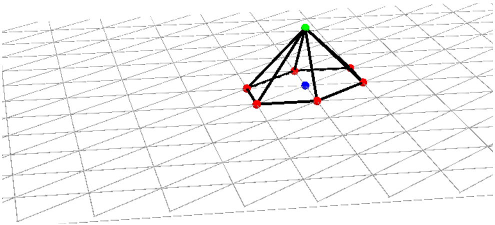
- *radiální část*: substituce
  $\rho = r\sqrt{\lambda}$, pro $\lambda \neq 0, f(r) = y(\rho(r)) \Rightarrow$ Besselova rovnice:
  $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) y = 0$
- $\xrightarrow{\text{hraniční podmínky}} J_n(R\sqrt{\lambda})\, h(\theta) = 0$
- vlastní čísla: $\lambda_{m,n} = \frac{k_{m,n}^2}{R^2}$

  $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0,\ n^2 = c,\ k_{m,n} =$ m-tá nula n-té Besselovy funkce
- vlastní funkce: $v_{n,m}(r,\theta) = J_n(\frac{k_{m,n} r}{R})\,(a\cos(n\theta) + b\sin(n\theta))$,

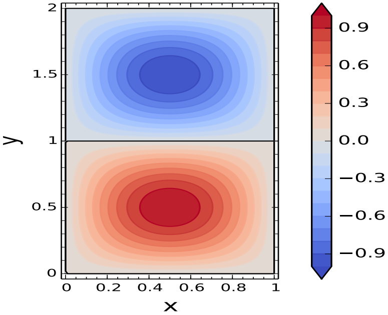
Numerická aproximace vlastní funkce

- Open-source matematiký software: SAGE
- Metoda konečných prvků $\rightarrow$ rozdělení oblasti na menší části $\rightarrow$ funkce f_j, (*viz* obrázek)
- Max-min - za funkce g_i bereme lineární kombinace f_j

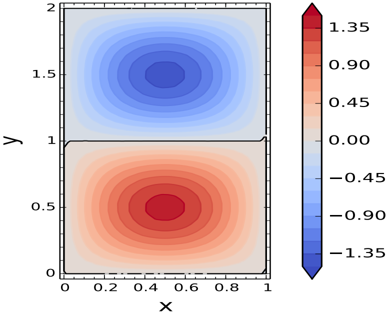
Obrázek : Funkce f_j



Obrázek : Druhá vlastní funkce obdélníku: $a = 1, b = 2$

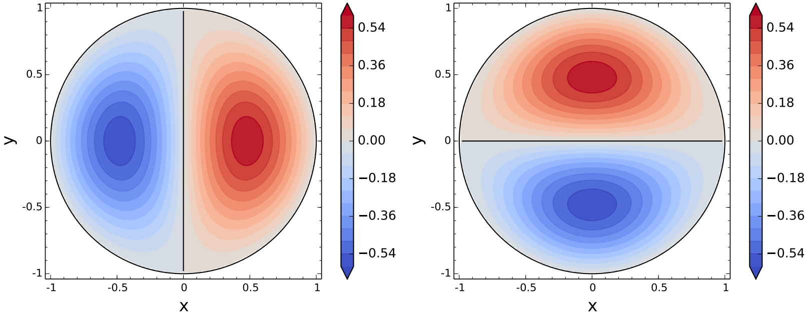


(a) Analytické řešení



(b) Numerické řešení

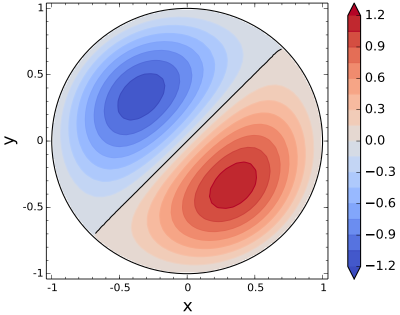
Obrázek : Druhá vlastní funkce a její degenerace na kruhu, analyticky



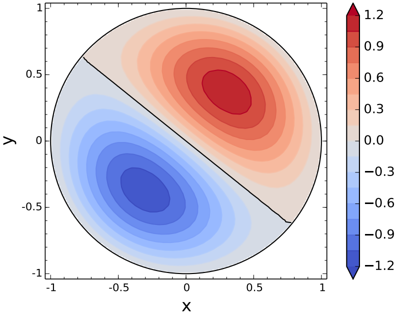
(a) f_2

(b) f_3

Obrázek : Druhá vlastní funkce a její degenerace na kruhu, numericky

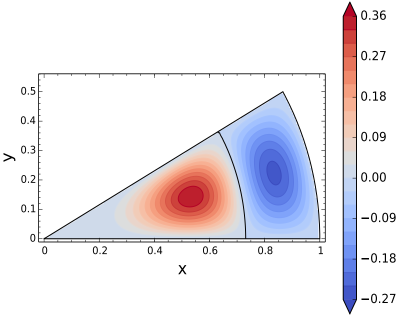


(a) f_2

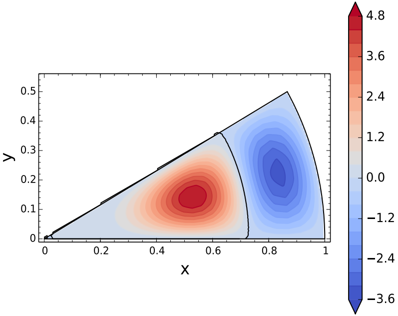


(b) f_3

Obrázek : Druhá vlastní funkce na výseči pro $\alpha = \frac{\pi}{6}$

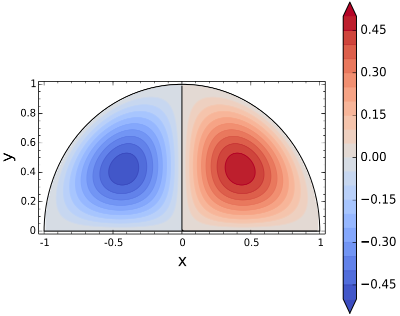


(a) Analytické řešení

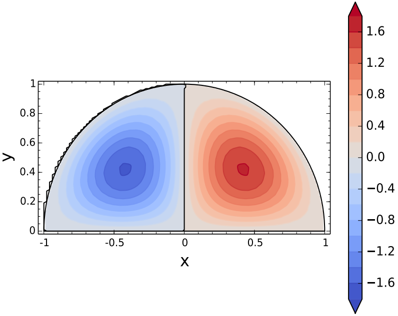


(b) Numerické řešení

Obrázek : Druhá vlastní funkce na výseči pro $\alpha = \pi$

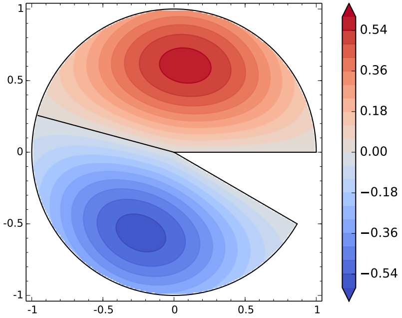


(a) Analytické řešení

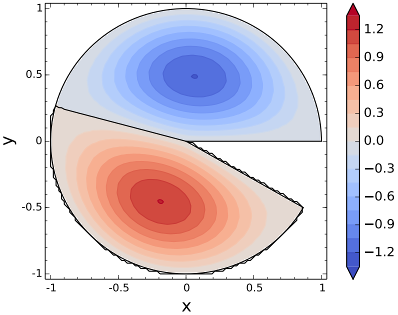


(b) Numerické řešení

Obrázek : Druhá vlastní funkce na výseči pro $\alpha = \frac{11\pi}{6}$

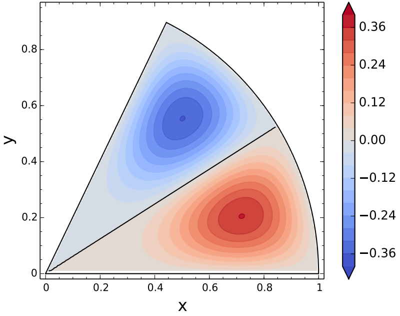


(a) Analytické řešení

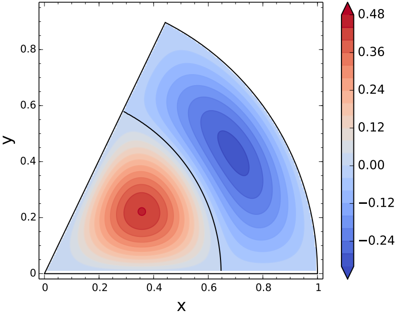


(b) Numerické řešení

Obrázek : Druhá vlastní funkce a její degenerace na výseči pro úhel $\alpha = 1.1125$, analyticky

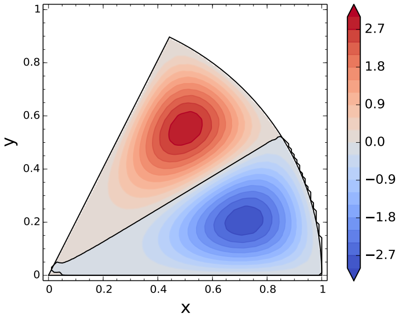


(a) f_2

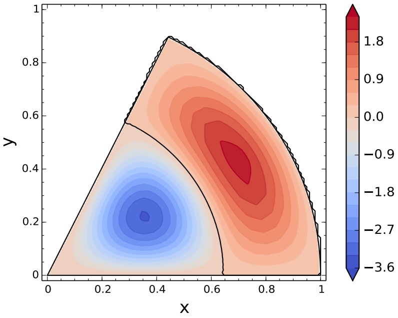


(b) f_3

Obrázek : Druhá vlastní funkce a její degenerace na výseči pro úhel $\alpha = 1.1125$, numericky



(a) f_2



(b) f_3

Shrnutí

- Numerické řešení vhodné pro ilustraci nodálních čar

Shrnutí

- Numerické řešení vhodné pro ilustraci nodálních čar
- Nelze takto potvrdit / vyvrátit hypotézu

Shrnutí

- Numerické řešení vhodné pro ilustraci nodálních čar
- Nelze takto potvrdit / vyvrátit hypotézu
- Zatím pro analyticky řešitelné oblasti

Shrnutí

- Numerické řešení vhodné pro ilustraci nodálních čar
- Nelze takto potvrdit / vyvrátit hypotézu
- Zatím pro analyticky řešitelné oblasti
- Rozšíření: pro další oblasti

Shrnutí

- Numerické řešení vhodné pro ilustraci nodálních čar
- Nelze takto potvrdit / vyvrátit hypotézu
- Zatím pro analyticky řešitelné oblasti
- Rozšíření: pro další oblasti
- Vylepšení: použití jiných metod, zjemnění triangulace

J. Blank, P. Exner, M. Havlíček: *Lineární operátory v kvantové fyzice*, Karolinum, 1993.

E. B. Davies: *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, 1995.

M. Reed, B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1*, Academic press, 1980.

D. Krejčiřík: *Geometrical aspects of spectral theory, lecture notes*[online]. Accessible on: http://gemma.ujf.cas.cz/ david/other/gspec.pdf, 2015.

E.H. Lieb, M. Loss: *Analysis*, American Mathematical Society, 2001.

R. Courant, D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics, Vol. 1*, Wiley Classics Edition, 1989.

M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Handbook of mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, 1972.

D. Krejčiřík, M. Tušek: *Nodal sets of thin curved layers*[pdf]. Accessible on: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039614003660, 2015.

scipy.org[online]. SciPy developers. Accessible on: http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/, 2015.

Děkuji za pozornost