Algebry a ortogonální polynomy

Daniel
Gromada

19.8.2015

Obsah

- Úvod do teorie reprezentací algeber
- Algebra $U(\mathrm{sl}_2)$ a Kravčukovy polynomy
- Obecný vztah reprezentací a ortogonálních polynomů
- Další příklady

Algebra

- **Algebra** je vektorový prostor vybavený dodatečnou binární operací
- Zde budeme uvažovat asociativní algebry s jednotkou a operaci budeme značit jako násobení
- **Příklad:** Algebra lineárních zobrazení na vektorovém prostoru V spolu se skládáním zobrazení
- **Příklad:** Algebra čtvercových matic

Algebra definovaná množinou generátorů

- Uvažujeme množinu **generátorů** $x_1, \dots, x_r$ a **generující relace** $f_k(x_1, \dots, x_r) = 0$
- Generátory mezi s sebou formálně násobíme a tvoříme lineární kombinace
- **Příklad:** Algebra $U(\mathrm{sl}_2)$ – generátory e, f, h a relace

$$ef - fe = h, \quad fh - hf = 2f, \quad he - eh = 2e$$

Algebraický homomorfismus a reprezentace

- **Homomorfismus** je zobrazení mezi algebrami, které zachovává algebraickou strukturu, tj.

$$\varphi(\alpha x + y) = \alpha\varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$$

- **Příklad:** Algebra lineárních zobrazení na V_n nad $\mathbb{C}$ je izomorfní s $\mathbb{C}^{n,n}$
- **Reprezentace** algebry je homomorfismus do algebry lineárních zobrazení (nebo matic)
- **Příklad:** Dvourozměrná maticová reprezentace algebry $U(\mathrm{sl}_2)$

$$\varphi(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Klasifikace reprezentací

- Úkolem je najít v jistém smyslu všechny reprezentace dané algebry
- Hledají se pouze **ireducibilní** reprezentace
- **Příklad:** Následující reprezentace $U(\mathrm{sl}_2)$ je reducibilní

$$\varphi(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Reprezentace, které lze získat podobnostní transformací považujeme za **ekvivalentní**
- **Platí:** φ je reprezentace $\Rightarrow \tilde{\varphi}(x) = P\varphi(x)P^{-1}$ je reprezentace, neboť

$$\tilde{\varphi}(xy) = P\varphi(xy)P^{-1} = P\varphi(x)\varphi(y)P^{-1} = P\varphi(x)P^{-1}P\varphi(y)P^{-1} = \tilde{\varphi}(x)\tilde{\varphi}(y)$$

Reprezentace $U(\mathrm{sl}_2)$

- $N+1$-rozměrná reprezentace $U(sl_2)$

$$\varphi(h) = \begin{pmatrix} N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N-2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N-4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -N \end{pmatrix}$$

$$\varphi(e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \varphi(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ N & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Platí:** Každá ireducibilní $N+1$-rozměrná reprezentace $U(\mathrm{sl}_2)$ je ekvivalentní uvedené reprezentaci φ.

Ekvivalentní reprezentace

- **Platí:** zobrazení σ definované působením na generátory $U(\mathrm{sl}_2)$ jako

$$\sigma(h) = e + f, \quad \sigma(e) = 1/2(h - e + f), \quad \sigma(f) = 1/2(h + e - f)$$

  je izomorfismus $U(\mathrm{sl}_2) \to U(\mathrm{sl}_2)$

- Zobrazení $\varphi \circ \sigma$ tedy musí být ireducibilní $N + 1$-rozměrná reprezentace stejně jako samotné φ

- Musí tedy existovat podobnostní transformace zobrazující

$$\varphi(h) =: A \quad \text{na} \quad \varphi(\sigma(h)) = \varphi(e + f) = \varphi(e) + \varphi(f) =: B \quad \text{a}$$

$$\varphi(e + f) = B \quad \text{na} \quad \varphi(\sigma(e + f)) = \varphi(\sigma(e) + \sigma(f)) = \varphi(h) = A$$

Kravčukovy polynomy

- Musí tedy existovat P tak, že
$$B = PAP^{-1} \quad \text{a} \quad A = PBP^{-1}$$

- Řádky této matice můžeme považovat za souřadnice polynomu.

- Ukáže se, že platí
$$P_{jk} = \binom{N}{j} K_j(k, 1/2, N),$$
kde $K_n(x, p, N)$ je n-tý Kravčukův polynom v bodě x s parametry p a N.

- Ten je definovaný jako
$$K_n(x, p, N) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} \middle| \frac{1}{p}\right) = \sum_{i=0}^{N} \frac{(-n)_i(-x)_i}{(-N)_i} \frac{1}{p^n n!},$$
kde $(a)_i = \prod_{k=0}^{i-1}(a+k)$.

Relace rekurence

- Víme, že

$$BP = PA.$$

- Ze tvarů matic plyne

$$[BP]_{ij} = (N - i + 1)P_{i-1,j} + (i + 1)P_{i+1,j}, \quad [PA]_{ij} = P_{ij}(N - 2j).$$

- Porovnáním a dosazením získáme rekurenci

$$\binom{N}{j-1}(N - j + 1)K_{j-1}(k) - \binom{N}{j}(N - 2k)K_j(k) + \binom{N}{j+1}(j + 1)K_{j+1}(k) = 0 \quad / : \binom{N}{j}$$

$$jK_{j-1}(k) - (N - 2k)K_j(k) + (N - j)K_{j+1}(k) = 0.$$

- Naopak z rovnice $PB = AP$ bychom získali

$$kK_j(k - 1) - (N - 2j)K_j(k) + (N - k)K_j(k + 1) = 0,$$

která odpovídá diferenční rovnici pro Kravčukovy polynomy.

Relace ortogonality

- Snadno najdeme diagonální podobnostní transformaci $\tilde{B} = T^{-1}BT$, $T = \operatorname{diag} t_0, \dots, t_N$ takovou, že $\tilde{B}$ je symetrická
- Matice $(PT)^{-1}$ tak bude diagonalizovat symetrickou matici $\tilde{B}$, sloupce $(PT)^{-1}$ tak budou ortogonální vůči standardnímu skalárnímu součinu
- Úpravou získáme, že řádky matice P – Kravčukovy polynomy – tedy jsou ortogonální vůči skalárnímu součinu definovanému maticí $T^2 = \operatorname{diag}\left(t_0^2, \dots, t_N^2\right)$
- V případě Kravčukových polynomů vyjde $t_j^2 = \binom{N}{j}$, tedy

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} K_j(k) K_l(k) = h_j \delta_{jl}$$

- Posloupnost h_j lze z teorie ortogonálních polynomů spočítat z relace rekurence

Zobecnění

- Totéž bychom mohli provést s obecnějším automorfismem

$$h \mapsto (1-2p)h + 2(1-p)e + 2pf,$$

$$e \mapsto (1-p)\left(h - \frac{1-p}{p}e + \frac{p}{1-p}f\right), \quad f \mapsto p(h+e-f).$$

- Dostali bychom obecné Kravčukovy polynomy s parametrem p.

Leonardovy páry

- Dvojici lineárních operátorů A, B nazveme **Leonardův pár**, existují-li báze $\mathscr{X}$ a $\mathscr{Y}$ takové, že v bázi $\mathscr{X}$ je A ireducibilní tridiagonální a B je diagonální a v bázi $\mathscr{Y}$ naopak.
- Označme

$$A^{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} c_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & c_1 & b_1 & & 0 \\ 0 & a_2 & c_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_N \end{pmatrix}, \quad A^{\mathscr{Y}} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_N \end{pmatrix},$$

$$B^{\mathscr{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{d}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{d}_N \end{pmatrix}, \quad B^{\mathscr{Y}} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 & \tilde{a}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{b}_0 & \tilde{c}_1 & \tilde{a}_2 & & 0 \\ 0 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \tilde{c}_N \end{pmatrix},$$

Leonardovy páry a ortogonální polynomy

- Za předpokladu, že $d_k = d_0 + dk$ a $\tilde{a}_k + \tilde{b}_k + \tilde{c}_k = \tilde{d}_0$ lze definovat posloupnost $N+1$ ortogonálních polynomů vztahem

$$P_j(k) = P_{jk},$$

kde P je matice přechodu od báze $\mathscr{Y}$ k $\mathscr{X}$.

- Pak platí vztahy

$$a_j P_{j-1}(k) + c_j P_j(k) + b_j P_{j+1}(k) = (d_0 + dk) P_j(k),$$

$$\tilde{a}_k P_j(k-1) + \tilde{c}_k P_j(k) + \tilde{b}_k P_j(k+1) = \tilde{d}_j P_j(k),$$

$$\sum_{k=0}^{N} P_j(k) P_l(k) w_k = h_j \delta_{jl},$$

$$w_k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\tilde{b}_{i-1}}{\tilde{a}_i}, \quad h_j = h_0 \prod_{i=1}^{j} \frac{a_i}{b_{i-1}}, \quad h_0 = \mathbb{P}_{00} \sum_{k=1}^{N} w_k.$$

q-Racahovy polynomy

- Explicitní tvar

$$R_n(\mu(x);\alpha,\beta,\gamma,\delta \mid q) = {}_4\varphi_3\left(\begin{matrix} q^{-n},\alpha\beta q^{n+1},q^{-x},\gamma\delta q^{x+1} \\ \alpha q,\beta\delta q,\gamma q \end{matrix} \,\middle|\, q;q\right) \quad n = 0,1,2,\ldots,N,$$

kde

$${}_r\varphi_s\left(\begin{matrix} a_1,\ldots,a_r \\ b_1,\ldots,b_s \end{matrix} \,\middle|\, q;z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a_1]_k\cdots[a_r]_k}{[b_1]_k\cdots[b_s]_k}(-1)^{(1+s-r)k} q^{(1+s-r)\binom{k}{2}} \frac{z^k}{(q;q)_k},$$

$$[a]_k = \prod_{j=1}^{k}(1-aq^{j-1}), \quad \mu(x) = q^{-x} + \gamma\delta q^{x+1},$$

$$\alpha q = q^{-N} \quad \text{nebo} \quad \beta\delta q = q^{-N} \quad \text{nebo} \quad \gamma q = q^{-N}, \quad \text{kde } N \in \mathbb{N}_0,$$

Algebra $U'_q(\mathrm{so}_3)$

- $U'_q(\mathrm{so}_3)$ je komplexní algebra, určená generátory I_1, I_2 a I_3 a relacemi

$$\begin{aligned} q^{1/2} I_1 I_2 - q^{-1/2} I_2 I_1 &= I_3 \\ q^{1/2} I_2 I_3 - q^{-1/2} I_3 I_2 &= I_1 \\ q^{1/2} I_3 I_1 - q^{-1/2} I_1 I_3 &= I_2. \end{aligned}$$

Reprezentace $U'_q(\mathrm{so}_3)$

- Tzv. klasická reprezentace $U'_q(\mathrm{so}_3)$ má tvar

$$\varphi(I_1)x_j = \frac{1}{q^{-M+j} + q^{M-j}}(-[j]x_{j-1} + [N-j]x_{j+1}),$$

$$\varphi(I_2)x_j = \frac{\mathrm{i}q^{1/2}}{q^{-M+j} + q^{M-j}}(q^{M-j}[j]x_{j-1} + q^{-M+j}[N-j]x_{j+1}),$$

$$\varphi(I_3)x_j = \mathrm{i}[-M+j]x_j,$$

kde $0 \leq j \leq N$, $x_{-1} = x_{N+1} = 0$, $M = N/2$ a $[\nu] = (q^\nu - q^{-\nu})/(q - q^{-1})$.

Reprezentace $U_q'(so_3)$ a Racahovy polynomy

- Nyní lze využít buď rotační automorfismus

$$I_1 \mapsto I_2, \quad I_2 \mapsto I_3, \quad I_3 \mapsto I_1,$$

Nebo automorfismus zaměňujicí pouze dva generátory

$$I_1 \mapsto I_2, \quad I_2 \mapsto I_1, \quad I_3 \mapsto I_3 + (I_2 I_1 - I_1 I_2)(q^{1/2} + q^{-1/2}),$$

- Již naznačeným postupem pak získáme q-Racahovy polynomy s parametry

$$\alpha = \beta = -\gamma = -\delta = \mathrm{i} q^{\frac{-N-1}{2}}$$

Askeyova–Wilsonova algebra

- Askeyova Wilsonova algebra je generovaná prvky K_0, K_1 a K_2 a relacemi

$$q^{1/2}K_0 - q^{-1/2}K_1 = K_2,$$

$$q^{1/2}K_2 - q^{-1/2}K_0 = BK_0 + C_1K_1 + D_1,$$
$$q^{1/2}K_1 - q^{-1/2}K_2 = BK_2 + C_0K_0 + D_0,$$

  kde B, C_0, C_1, D_0 a D_1 jsou komplexní parametry

- Z reprezentací této algebry lze odvodit vlastnosti q-Racahových polynomů pro libovolné parametry

Děkuji za pozornost