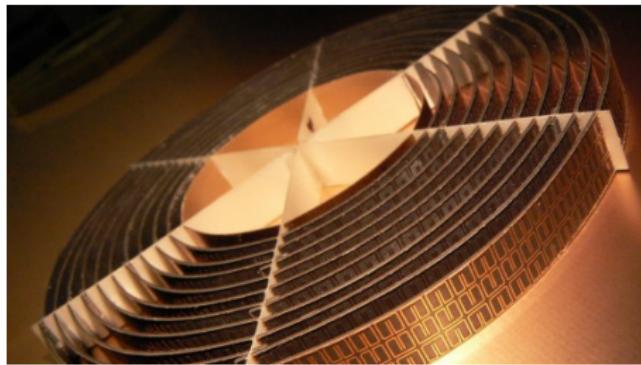


# Spektrální teorie pro metamateriály

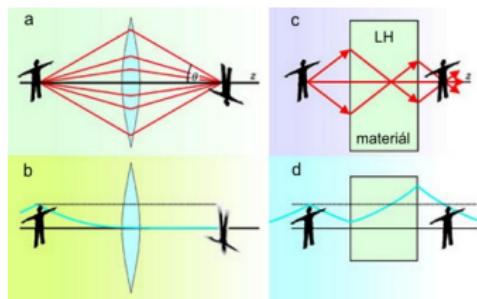
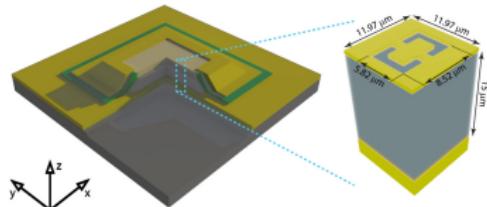
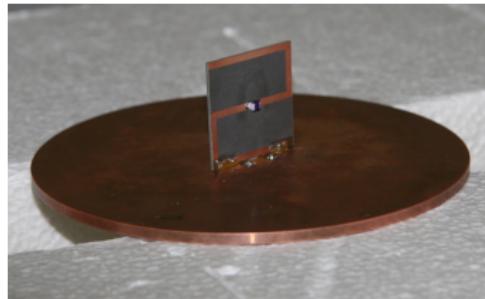
Filip Hložek  
Školitel: David Krejčířík



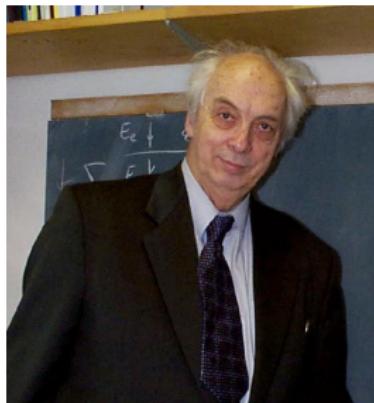
# Metamateriály

- Metamateriály jsou uměle vyrobené kompozitní materiály
- “meta” = pohled shora, na vyšší úrovni, vymanění se ze systému, přesahující
- Disponují neobvyklými fyzikálními vlastnostmi: záporná permitivita, permeabilita, záporný index lomu
- Široké možnosti využití

# Metamateriály



# Průkopníci



- Viktor Veselago - teoreticky analyzoval vlastnosti materiálů se zápornými hodnotami  $\epsilon, \mu$  (1968)

# Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor  $\vec{k}$  bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

# Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor  $\vec{k}$  bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

- Pro rovinnou monochromatickou vlnu jsou všechny kvantity úměrné  $e^{i(kz-\omega t)}$   
 $\Rightarrow$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$$

# Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor  $\vec{k}$  bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

- Pro rovinnou monochromatickou vlnu jsou všechny kvantity úměrné  $e^{i(kz-\omega t)}$   
 $\Rightarrow$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$$

- Pro  $\epsilon > 0$  a  $\mu > 0$  tvoří vektory  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$  pravotočivou trojici vektorů, kdežto pro  $\epsilon < 0$  a  $\mu < 0$  levotočivou.

# Levotočivé materiály (left-handed materials)

- Z Maxwellových rovnic se dá zjistit, že vlnový vektor  $\vec{k}$  bude mít opačné znaménko než v obvyklých materiálech

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

- Pro rovinnou monochromatickou vlnu jsou všechny kvantity úměrné  $e^{i(kz-\omega t)}$   
 $\Rightarrow$

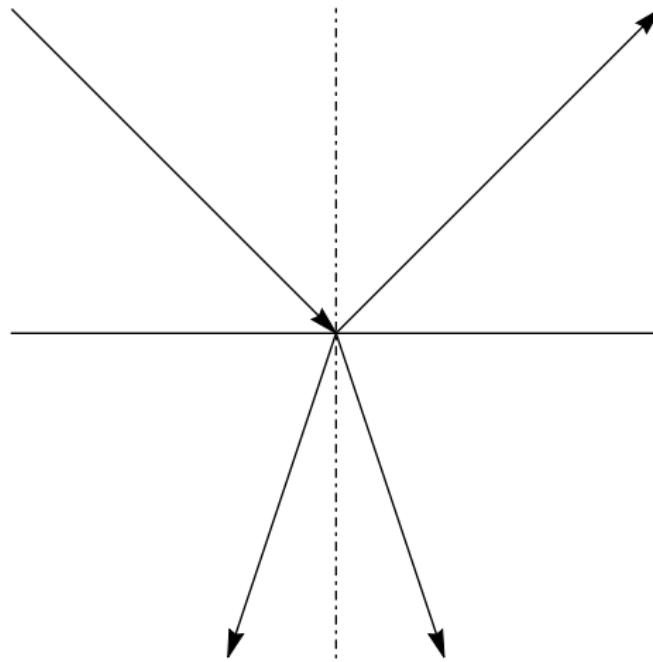
$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}$$

$$\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \epsilon \vec{E}$$

- Pro  $\epsilon > 0$  a  $\mu > 0$  tvoří vektory  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$  pravotočivou trojici vektorů, kdežto pro  $\epsilon < 0$  a  $\mu < 0$  levotočivou.
- Naproti tomu Poyntingův vektor  $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$  tvoří s  $\vec{E}, \vec{H}$  vždy pravotočivou trojici vektorů

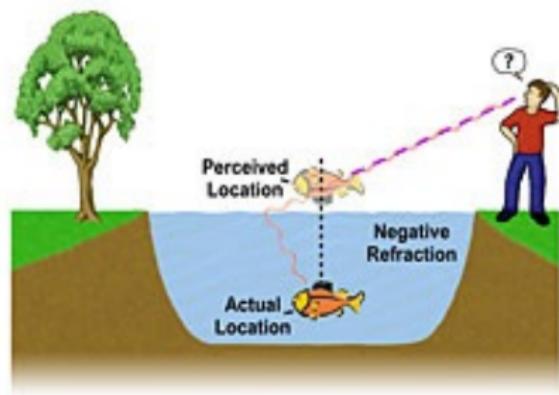
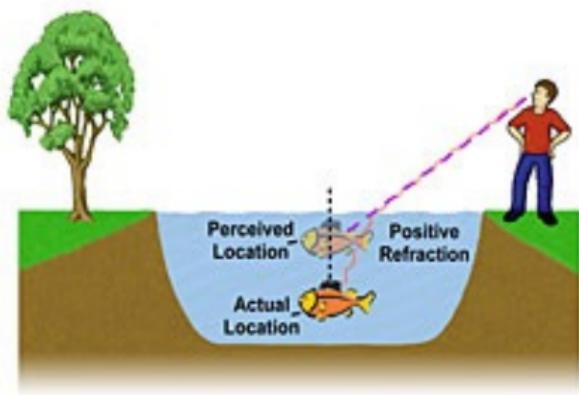
# Záporný index lomu

- $n = \sqrt{\epsilon\mu}$
- Snellův zákon  $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = n_{12}$

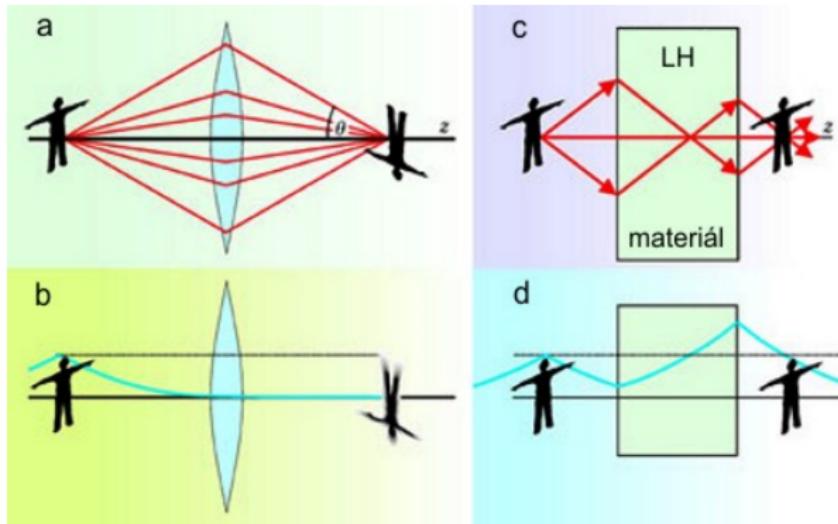


# Záporný index lomu

- $n = \sqrt{\epsilon\mu}$
- Snellův zákon  $\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = n_{12}$



# Veselagova čočka (superčočka)



# Průkopníci



- John Pendry - navrhl první materiál se zápornou permitivitou (1996)

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

# Průkopníci



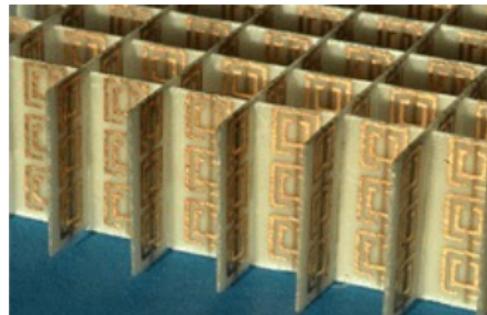
- John Pendry - navrhl první materiál se zápornou permitivitou (1996)

$$\epsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}$$

- a se zápornou permeabilitou (1999)

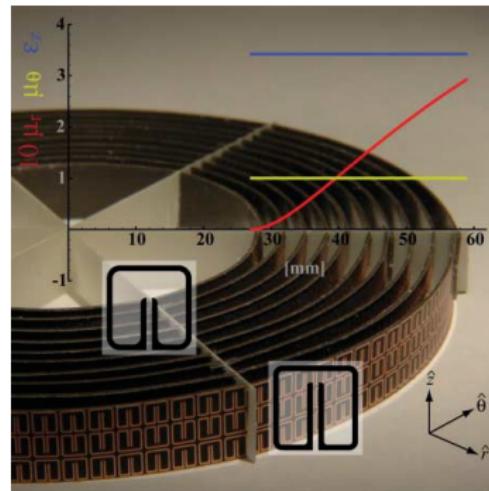
$$\mu_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\Gamma}$$

# Průkopníci



- David R. Smith - zkonstruoval první prostředí se záporným indexem lomu (2000)
- Maskování pro mikrovlny (2006)

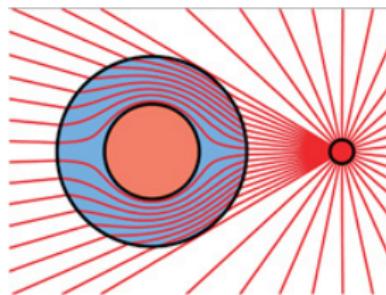
# Průkopníci



- David R. Smith - zkonstruoval první prostředí se záporným indexem lomu (2000)
- Maskování pro mikrovlny (2006)

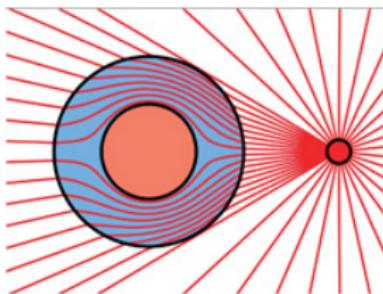
# Další fyzikální přístupy

- Geometrická optika

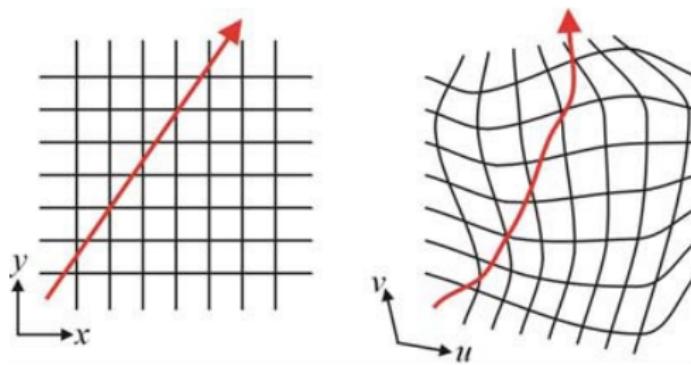


# Další fyzikální přístupy

- Geometrická optika

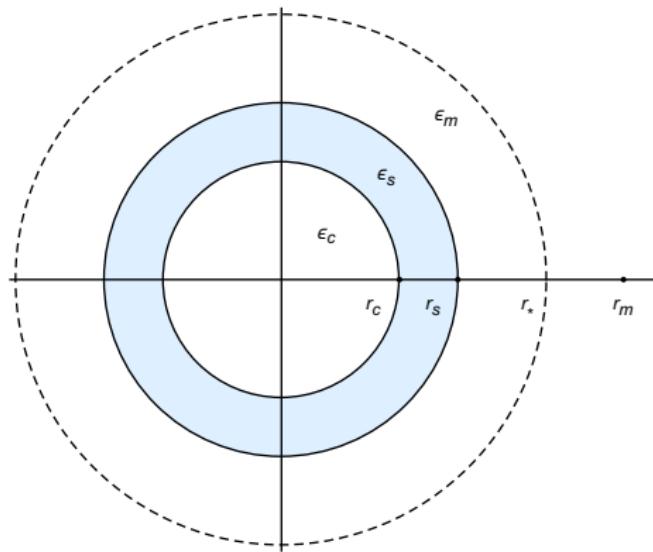


- Obecná relativita



# Anomální lokalizovaná rezonance

- N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, G. W. Milton zkoumají případ maskovaného válce (coated cylinder) ve dvou dimenzích (1994)



# Anomální lokalizovaná rezonance

- Zkoumá se rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = 0$$

kde

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_c, & x \in B_{r_c} \\ -\epsilon_s, & x \in B_{r_s} \setminus B_{r_c} \\ \epsilon_m, & x \in B_{r_m} \setminus B_{r_s} \end{cases}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Zkoumá se rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon_\delta \nabla V_\delta) = 0$$

kde

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} \epsilon_c, & x \in B_{r_c} \\ (-1 + i\delta)\epsilon_m, & x \in B_{r_s} \setminus B_{r_c} \\ \epsilon_m, & x \in B_{r_m} \setminus B_{r_s} \end{cases}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Zkoumá se rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon_\delta \nabla V_\delta) = \alpha f$$

kde

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} \epsilon_c, & x \in B_{r_c} \\ (-1 + i\delta)\epsilon_m, & x \in B_{r_s} \setminus B_{r_c} \\ \epsilon_m, & x \in B_{r_m} \setminus B_{r_s} \end{cases}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Zkoumá se rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon_\delta \nabla V_\delta) = 0$$

kde

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} +1, & x \in B_{r_c} \\ -1 + i\delta, & x \in B_{r_s} \setminus B_{r_c} \\ +1, & x \in B_{r_m} \setminus B_{r_s} \end{cases}$$

- ALR nastává pouze pokud dochází k "blow-upu" energie, tj.

$$E_\delta := \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{B_{r_s} \setminus B_{r_c}} \delta |\nabla V_\delta|^2 dx = \infty$$

přičemž  $V_\delta(x)$  zůstává omezená mimo jistý poloměr  $a$ , tj.

$$|V_\delta(x)| < C, \text{ pro } |x| > a$$

pro nějaké konstanty  $C$  a  $a$  nezávislé na  $\delta \Rightarrow B_a$  obsahuje celou oblast ALR

- Anomálnost: "blow-up" energie může nastávat i v jisté blízké oblasti kolem maskovacího zařízení

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Uvažujme jednodimenzionální problém

$$\epsilon(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ +1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$H_0 = -\frac{d}{dx}\epsilon(x)\frac{d}{dx}$$

$$D(H_0) = \{\psi \in H^2((-1, 0)) \oplus H^2((0, 1)) | \psi(-1) = \psi(1) = 0, \\ \psi(0^-) = \psi(0^+), \\ \psi'(0^-) = -\psi'(0^+)\}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Uvažujme jednodimenzionální problém

$$\epsilon(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-1, 0) \\ +1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$H_0 = -\frac{d}{dx}\epsilon(x)\frac{d}{dx}$$

$$D(H_0) = \{\psi \in H^2((-1, 0)) \oplus H^2((0, 1)) | \psi(-1) = \psi(1) = 0, \\ \psi(0^-) = \psi(0^+), \\ \psi'(0^-) = -\psi'(0^+)\}$$

- $H_0$  je určitě symetrický operátor  $\rightarrow$  dá se ukázat i samosdruženost

$$\begin{aligned} (\psi, H_0\varphi) &= \int_{-1}^0 \bar{\psi}\varphi'' - \int_0^1 \bar{\psi}\varphi'' = \\ &= - \int_{-1}^0 \bar{\psi}'\varphi' + \int_0^1 \bar{\psi}'\varphi' + [\bar{\psi}\varphi']_{-1}^{0-} - [\bar{\psi}\varphi']_{0+}^{1-} = \\ &= \int_{-1}^0 \bar{\psi}''\varphi - \int_0^1 \bar{\psi}''\varphi - [\bar{\psi}'\varphi]_{-1}^{0-} + [\bar{\psi}'\varphi]_{0+}^{1-} + [\bar{\psi}\varphi']_{-1}^{0-} - [\bar{\psi}\varphi']_{0+}^{1-} \end{aligned}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Tento operátor nyní modifikujeme

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} -1 + i\delta, & x \in (-1, 0) \\ +1 + i\delta, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$H_\delta = -\frac{d}{dx}\epsilon_\delta(x)\frac{d}{dx}$$

$$D(H_\delta) = \{\psi \in H_0^1((-1, 1)), \psi \in H^2((-1, 0)) \oplus H^2((0, 1)) | (\delta + i)\psi'(0^-) = (\delta - i)\psi'(0^+)\}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Tento operátor nyní modifikujeme

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} -1 + i\delta, & x \in (-1, 0) \\ +1 + i\delta, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$H_\delta = -\frac{d}{dx}\epsilon_\delta(x)\frac{d}{dx}$$

$$D(H_\delta) = \{\psi \in H_0^1((-1, 1)), \psi \in H^2((-1, 0)) \oplus H^2((0, 1)) | (\delta + i)\psi'(0^-) = (\delta - i)\psi'(0^+)\}$$

- $H_\delta$  není samosdružený

# Matematická vsuvka

## Definice: (Číselný obor hodnot)

Nechť  $H$  je operátor v Hilbertově prostoru  $\mathcal{H}$ . Číselný obor hodnot  $\Theta(H)$  operátoru  $H$  je množina všech komplexních čísel  $(\psi, H\psi)$  kde  $\psi, \|\psi\| = 1$  prochází celé  $D(H)$ .

- $\sigma_p(H) \subset \Theta(H)$

## Definice:

Operátor  $H \in \mathcal{H}$  je akretivní je-li číselný obor hodnot  $\Theta(H)$  podmnožina pravé pololoroviny komplexní roviny, tj. pokud  $\operatorname{Re}(\psi, H\psi) \geq 0$  pro všechna  $\psi \in D(H)$ .

Operátor  $H$  který navíc splňuje  $(H + \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  a  $\|(H + \lambda)^{-1}\| \leq (\operatorname{Re} \lambda)^{-1}$  pro  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  se nazývá m-akretivní.

- m-akretivní operátor je maximální akretivní operátor

# Matematická vsuvka

## Definice:

Operátor  $H$  je kvazi-akretivní (kvazi-m-akretivní) je-li  $H + \alpha$  akretivní (m-akretivní) pro nějaké číslo  $\alpha$ .

## Definice:

Operátor  $H$  je sektoriální, je-li číselný obor hodnot  $\Theta(H)$  podmnožinou sektoru  $|\arg(\zeta - \gamma)| \leq \theta < \pi/2$ .  $\gamma$  a  $\theta$  se nazývají vrchol a semi-úhel sektoriálního operátoru  $H$ .

Operátor  $H$  se nazývá m-sektoriální je-li sektoriální a kvazi-m-akretivní.

- $H_\delta$  není ani m-sektoriální, ale operátor  $V_\delta = e^{-i\frac{\pi}{2}}$  už m-sektoriální je.

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Rádi bychom viděli, že v limitě  $\delta \rightarrow 0$  jde operátor  $H_\delta \rightarrow H_0$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Rádi bychom viděli, že v limitě  $\delta \rightarrow 0$  jde operátor  $H_\delta \rightarrow H_0$
- Můžeme spočítat vlastní hodnoty
  - $H_0$  :

$$(0, 1) : \psi'' + \lambda\psi = 0$$

$$(-1, 0) : \psi'' - \lambda\psi = 0$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Rádi bychom viděli, že v limitě  $\delta \rightarrow 0$  jde operátor  $H_\delta \rightarrow H_0$
- Můžeme spočítat vlastní hodnoty
  - $H_0$  :

$$(0, 1) : \psi'' + \lambda\psi = 0$$

$$(-1, 0) : \psi'' - \lambda\psi = 0$$

$$\Rightarrow \tan \sqrt{\lambda} = \tanh \sqrt{\lambda}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Rádi bychom viděli, že v limitě  $\delta \rightarrow 0$  jde operátor  $H_\delta \rightarrow H_0$
- Můžeme spočítat vlastní hodnoty

- $H_0$  :

$$(0, 1) : \psi'' + \lambda\psi = 0$$

$$(-1, 0) : \psi'' - \lambda\psi = 0$$

$$\Rightarrow \tan \sqrt{\lambda} = \tanh \sqrt{\lambda}$$

- $H_\delta$  :

$$(0, 1) : (1 + i\delta)\psi'' + \lambda\psi = 0$$

$$(-1, 0) : (1 - i\delta)\psi'' - \lambda\psi = 0$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Rádi bychom viděli, že v limitě  $\delta \rightarrow 0$  jde operátor  $H_\delta \rightarrow H_0$
- Můžeme spočítat vlastní hodnoty
  - $H_0$  :

$$(0, 1) : \psi'' + \lambda\psi = 0$$

$$(-1, 0) : \psi'' - \lambda\psi = 0$$

$$\Rightarrow \tan \sqrt{\lambda} = \tanh \sqrt{\lambda}$$

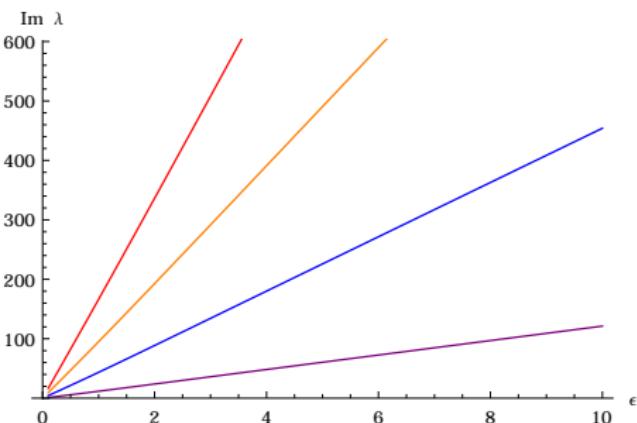
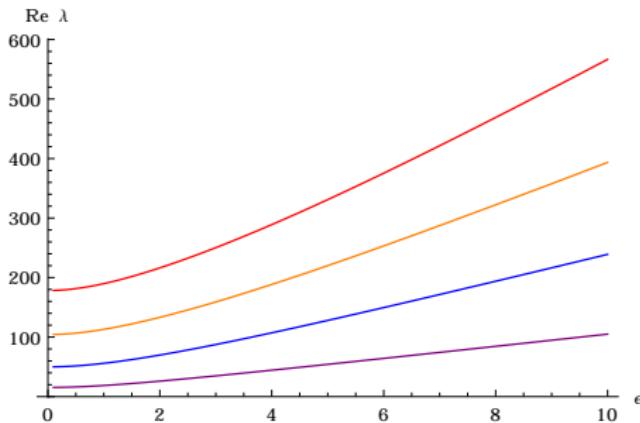
- $H_\delta$  :

$$(0, 1) : (1 + i\delta)\psi'' + \lambda\psi = 0$$

$$(-1, 0) : (1 - i\delta)\psi'' - \lambda\psi = 0$$

$$\Rightarrow \tan \sqrt{\frac{\lambda}{1 + i\delta}} = \sqrt{\frac{1 - i\delta}{1 + i\delta}} \tanh \sqrt{\frac{\lambda}{1 - i\delta}}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance



# Anomální lokalizovaná rezonance

- Bouchitté, Schweizer (2009) zkoumali řešení rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon_\delta \nabla u_\delta) = 0$$

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} +1, & x \in B_1 \\ -1 + i\delta, & x \in B_R \setminus B_1 \\ +1, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R \end{cases}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Bouchitté, Schweizer (2009) zkoumali řešení rovnice

$$\nabla \cdot (\epsilon_\delta \nabla u_\delta) = 0$$

$$\epsilon_\delta(x) = \begin{cases} +1, & x \in B_1 \\ -1 + i\delta, & x \in B_R \setminus B_1 \\ +1, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R \end{cases}$$

- Řešení takovéto rovnice lze najít jako ansatz

$$u_\delta(x) = U_k(r)e^{ik\theta}$$

$$U_k(r) = \begin{cases} r^k, & \text{pro } r \leq 1 \\ ar^k + br^{-k}, & \text{pro } 1 < r \leq R \\ \alpha r^k + \beta r^{-k}, & \text{pro } R < r \end{cases}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Lokalizační index

$$P_k^\delta := P(\delta, k, R) := \frac{\beta}{\alpha}$$

- Zkoumá se limita  $\delta \rightarrow 0$  výrazu

$$\frac{\beta r^{-k}}{\alpha r^k} = \frac{P_k^\delta}{r^{2k}} = \left(\frac{R^*}{r}\right)^{2k} \frac{(2i\delta - i^2\delta^2)(1 - R^{-2k})}{i^2\delta^2 R^k - (2 - i\delta)^2 R^{-k}}$$
$$R^* = R^{3/2}$$

$$\max_k \frac{|P_k^\delta|}{r^{2k}} \rightarrow 0 , r > R^*$$

$$\max_k \frac{|P_k^\delta|}{r^{2k}} \rightarrow \infty , r < R^*$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Lokalizační index

$$P_k^\delta := P(\delta, k, R) := \frac{\beta}{\alpha}$$

- Zkoumá se limita  $\delta \rightarrow 0$  výrazu

$$\frac{\beta r^{-k}}{\alpha r^k} = \frac{P_k^\delta}{r^{2k}} = \left(\frac{R^*}{r}\right)^{2k} \frac{(2i\delta - i^2\delta^2)(1 - R^{-2k})}{i^2\delta^2 R^k - (2 - i\delta)^2 R^{-k}}$$
$$R^* = R^{3/2}$$

$$\max_k \frac{|P_k^\delta|}{r^{2k}} \rightarrow 0 , r > R^*$$

$$\max_k \frac{|P_k^\delta|}{r^{2k}} \rightarrow \infty , r < R^*$$

- Platí něco podobného i ve vyšších dimenzích?

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Lokalizační index

$$P_k^\delta := P(\delta, k, R) := \frac{\beta}{\alpha}$$

- Zkoumá se limita  $\delta \rightarrow 0$  výrazu

$$\frac{\beta r^{-k}}{\alpha r^k} = \frac{P_k^\delta}{r^{2k}} = \left(\frac{R^*}{r}\right)^{2k} \frac{(2i\delta - i^2\delta^2)(1 - R^{-2k})}{i^2\delta^2 R^k - (2 - i\delta)^2 R^{-k}}$$
$$R^* = R^{3/2}$$

$$\max_k \frac{|P_k^\delta|}{r^{2k}} \rightarrow 0 , r > R^*$$

$$\max_k \frac{|P_k^\delta|}{r^{2k}} \rightarrow \infty , r < R^*$$

- Platí něco podobného i ve vyšších dimenzích?
- Ammari, Ciraolo, Kang, Lee, Milton (2012): NE!

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Zkoumáme stejný problém ve 3 dimenzích, tj. rovnici

$$\Delta \Psi(x) = 0$$

s okrajovými podmínkami

$$\Psi(1^-) = \Psi(1^+)$$

$$\Psi(R^-) = \Psi(R^+)$$

$$\epsilon_\delta(1^-)\nabla\Psi(1^-) = \epsilon_\delta(1^+)\Psi(1^+)$$

$$\epsilon_\delta(R^-)\nabla\Psi(R^-) = \epsilon_\delta(R^+)\Psi(R^+)$$

- Laplaceův operátor má ve třech dimenzích tvar

$$-\Delta = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}$$

- $-\Delta_{S^2}$  je Laplace-Beltramiho operátor, jehož spektrum je  $\sigma(-\Delta_{S^2}) = \{l(l+1)\}_{l=0}^\infty$  a proto lze Laplaceův operátor psát jako

$$-\Delta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \left( -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right)$$

- Předpokládáme řešení Laplaceovy rovnice v separovaném tvaru  $\Psi(x) = \psi(r)\Phi(\Omega)$ , kde  $\Omega = (\theta, \phi)$
- Řešíme tak rovnici

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \psi(r) \right) + \frac{l(l+1)}{r^2} \psi(r) = 0$$

$$\Rightarrow \psi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} (\alpha_l(r)r^l + \beta_l(r)r^{-l-1})$$

- Označíme  $\psi_l$   $l$ -tý člen sumy. Koeficienty  $\alpha_l(r), \beta_l(r)$  se budou lišit v každé ze tří oblastí

$$\psi_l(r) = \begin{cases} r^l, & \text{pro } r \leq 1 \\ a_l r^l + b_l r^{-l-1}, & \text{pro } 1 < r \leq R \\ \alpha_l r^l + \beta_l r^{-l-1}, & \text{pro } R < r \end{cases}$$

# Anomální lokalizovaná rezonance

- Po dosazení okrajových podmínek vypočteme čísla  $\alpha_I, \beta_I$  a z nich potom počítáme

$$\left| \frac{\beta_I r^{-I-1}}{\alpha_I r^I} \right| = \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} =$$
$$= \left( \frac{R}{r} \right)^{2I+1} \sqrt{\frac{I\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}(R^{2I+1}-1)}{16I^2 + 32I^3 + 16I^4 + 8I^2R^{2I+1} + R^{4I+2} + 8IR^{2I+1} + 8\delta^2I^2 + 16\delta^2I^3 + 8\delta^2I^4 + 6\delta^2IR^{2I+1} + 14\delta^2I^2R^{2I+1} + 16\delta^2I^3R^{2I+1} + 8\delta^2I^4R^{2I+1} + \delta^2R^{4I+2} + 2\delta^2IR^{4I+2} + 2\delta^2I^2R^{4I+2} + \delta^4I^2 + 2\delta^4I^3 - \delta^4I^4 + 2\delta^4I^2R^{2I+1} - 4\delta^4I^3R^{2I+1} + 2\delta^4I^4R^{2I+1} + \delta^4I^2R^{4I+2} + 2\delta^4I^3R^{4I+2} + \delta^4I^4R^{4I+2}}}$$

- Hledáme maximum přes  $I$

- zjevně v nule má  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  nulovou hodnotu
- v nekonečnu spočítáme limitu

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} = \lim_{I \rightarrow +\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{2I+1} \frac{I^2 R^{2I+1}}{I^2 R^{2I+1}} \frac{\sqrt{4 + \delta^2} \sqrt{\frac{1}{I^2} + \delta^2 \left( \frac{1}{I} + 1 \right)^2} \left( 1 - \frac{1}{R^{2I+1}} \right)}{\sqrt{\dots + \delta^4}}$$

- Hledáme maximum přes  $I$

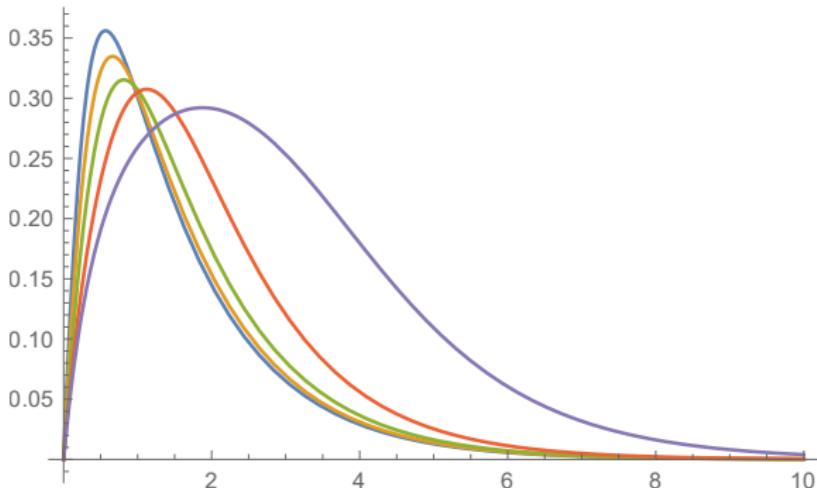
- zjevně v nule má  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  nulovou hodnotu
- v nekonečnu spočítáme limitu

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} = \lim_{I \rightarrow +\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{2I+1} \frac{I^2 R^{2I+1}}{I^2 R^{2I+1}} \frac{\sqrt{4 + \delta^2} \sqrt{\frac{1}{I^2} + \delta^2 \left( \frac{1}{I} + 1 \right)^2} \left( 1 - \frac{1}{R^{2I+1}} \right)}{\sqrt{\dots + \delta^4}} \\ = 0$$

- Hledáme maximum přes  $I$

- zjevně v nule má  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  nulovou hodnotu
- v nekonečnu spočítáme limitu

$$\lim_{I \rightarrow +\infty} \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} = \lim_{I \rightarrow +\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{2I+1} \frac{I^2 R^{2I+1}}{I^2 R^{2I+1}} \frac{\sqrt{4 + \delta^2} \sqrt{\frac{1}{I^2} + \delta^2} \left( \frac{1}{I} + 1 \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{R^{2I+1}} \right)}{\sqrt{\dots + \delta^4}} = 0$$



- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  shora

$$\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} = \left(\frac{R}{r}\right)^{2I+1} \frac{I\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2(R^{2I+1}-1)}}{\sqrt{\dots}}$$

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  shora

$$\begin{aligned} \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} &= \left(\frac{R}{r}\right)^{2I+1} \frac{I\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}(R^{2I+1}-1)}{\sqrt{\dots}} \\ &\leq \frac{1}{I^2} \frac{IC\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}R^{2I+1}}{R^{2I+1}\sqrt{1+\delta^4/4}} \end{aligned}$$

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  shora

$$\begin{aligned}
 \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} &= \left(\frac{R}{r}\right)^{2I+1} \frac{I\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}(R^{2I+1}-1)}{\sqrt{\dots}} \\
 &\leq \frac{1}{I^2} \frac{IC\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}R^{2I+1}}{R^{2I+1}\sqrt{1+\delta^4/4}} \\
 &\leq \frac{C}{I} \frac{1+\delta(1+I)}{1+\delta^2/4}
 \end{aligned}$$

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  shora

$$\begin{aligned}
 \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} &= \left(\frac{R}{r}\right)^{2I+1} \frac{I\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}(R^{2I+1}-1)}{\sqrt{\dots}} \\
 &\leq \frac{1}{I^2} \frac{IC\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}R^{2I+1}}{R^{2I+1}\sqrt{1+\delta^4/4}} \\
 &\leq \frac{C}{I} \frac{1+\delta(1+I)}{1+\delta^2 I^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 I^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 I_0^2}
 \end{aligned}$$

- Pro nalezení maxima provádíme odhad funkce  $\frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}}$  shora

$$\begin{aligned} \frac{|P_I^\delta|}{r^{2I+1}} &= \left(\frac{R}{r}\right)^{2I+1} \frac{I\sqrt{4+\delta^2}\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}(R^{2I+1}-1)}{\sqrt{\dots}} \\ &\leq \frac{1}{I^2} \frac{IC\sqrt{1+\delta^2(1+I)^2}R^{2I+1}}{R^{2I+1}\sqrt{1+\delta^4/4}} \\ &\leq \frac{C}{I} \frac{1+\delta(1+I)}{1+\delta^2 I^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 I^2} \leq \frac{C}{1+\delta^2 I_0^2} \end{aligned}$$

- Provedeme-li nyní limitu  $\delta \rightarrow 0$ , dostaneme nějakou konstantu  $C$ , tedy nedostali jsme  $+\infty$  a tedy nedochází k ALR.

# Shrnutí

- Operátorový přístup poměrně nový
- Behrndt, Krejčířík (2012) - vyšetření diferenciálního výrazu  $-\nabla(\epsilon \nabla)$  na obdélníku pro  $\epsilon$  bez  $\delta$

$$\epsilon(x, y) = \begin{cases} +1, & (x, y) \in \Omega_+ = (0, 1) \times (0, 1) \\ -1, & (x, y) \in \Omega_- = (-1, 0) \times (0, 1) \end{cases}$$

- Další kroky: Zobecnění tohoto článku do vyšších dimenzí

Děkuji za pozornost

