

Robustnost Turingova modelu

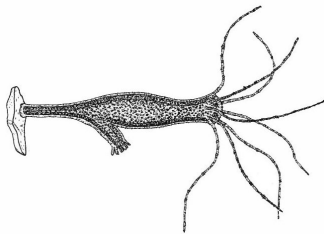
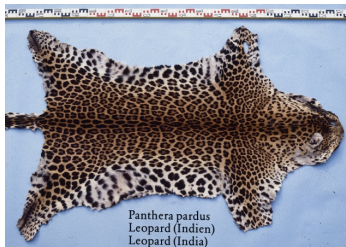
Michal Kozák

Katedra matematiky, skupina MAFIA
FJFI ČVUT

18. srpna 2015

- ① Motivace
 - Turingův model
 - Robustnost modelu
- ② Zobecnění modelu
 - přidání advekce
 - prostorová závislost koeficientů
- ③ Shrnutí

Motivace – vznik prostorových vzorů



Systém typu reakce-difuze

- Vývoj dvou látek (u, v):
 - pohybují se (všemi směry stejně),
 - spolu interagují;
- morfogeny / chemické reaktanty,

Systém dvou evolučních parciálních DR:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v)\end{aligned} \quad v [0, \infty) \times [0, L],$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad v 0, L,$$
$$u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0.$$

Konstanta $\bar{u}, \bar{v}$ splňující $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$ je řešením. Existuje nějaké nekonstantní (nehomogenní řešení).

Systém typu reakce-difuze

- Vývoj dvou látek (u, v) :
 - pohybují se (všemi směry stejně),
 - spolu interagují;
- morfogeny / chemické reaktanty,

Systém dvou evolučních parciálních DR:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v)\end{aligned} \quad v [0, \infty) \times [0, L],$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad v 0, L,$$
$$u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0.$$

Konstanta $\bar{u}, \bar{v}$ splňující $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$ je řešením. Existuje nějaké nekonstantní (nehomogenní řešení).

Systém typu reakce-difuze

- Vývoj dvou látek (u, v) :
 - pohybují se (všemi směry stejně),
 - spolu interagují;
- morfogeny / chemické reaktanty,

Systém dvou evolučních parciálních DR:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v)\end{aligned} \quad v [0, \infty) \times [0, L],$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad v 0, L,$$
$$u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0.$$

Konstanta $\bar{u}, \bar{v}$ splňující $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$ je řešením. Existuje nějaké nekonstantní (nehomogenní řešení).

Systém typu reakce-difuze

- Vývoj dvou látek (u, v) :
 - pohybují se (všemi směry stejně),
 - spolu interagují;
- morfogeny / chemické reaktanty,

Systém dvou evolučních parciálních DR:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v) \quad v \in [0, \infty) \times [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad v \in 0, L, \\ u(x, 0) &= u_0, \quad v(x, 0) = v_0.\end{aligned}$$

Konstanta $\bar{u}, \bar{v}$ splňující $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$ je řešením. Existuje nějaké nekonstantní (nehomogenní řešení).

Systém typu reakce-difuze

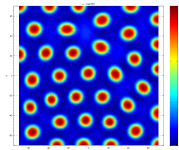
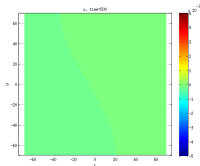
- Vývoj dvou látek (u, v) :
 - pohybují se (všemi směry stejně),
 - spolu interagují;
- morfogeny / chemické reaktanty,

Systém dvou evolučních parciálních DR:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v)\end{aligned} \quad v [0, \infty) \times [0, L],$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad v 0, L,$$
$$u(x, 0) = u_0, \quad v(x, 0) = v_0.$$

Konstanta $\bar{u}, \bar{v}$ splňující $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$ je řešením. Existuje nějaké nekonstantní (nehomogenní řešení).

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

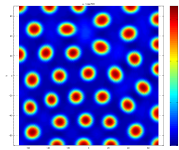
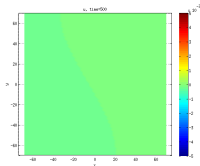
- ① stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ② stane se nestabilní,
- ③ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ④ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

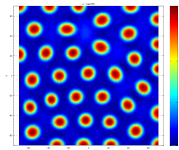
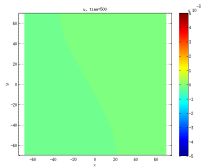
- ① stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ② stane se nestabilní,
- ③ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ④ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

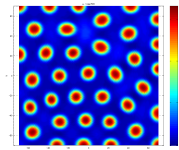
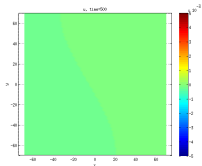
- ❶ stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ❷ stane se nestabilní,
- ❸ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ❹ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

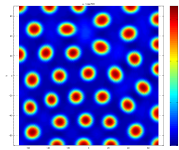
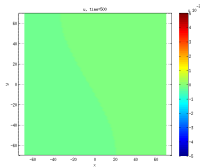
- ❶ stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ❷ stane se nestabilní,
- ❸ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ❹ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

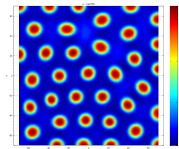
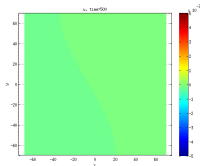
- ❶ stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ❷ stane se nestabilní,
- ❸ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ❹ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

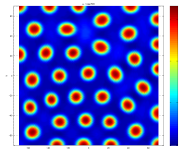
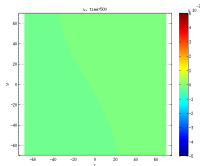
- ❶ stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ❷ stane se nestabilní,
- ❸ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ❹ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

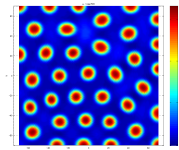
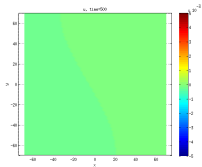
- ❶ stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ❷ stane se nestabilní,
- ❸ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ❹ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

Model vzniku prostorových struktur



Popis modelu:

- ❶ stabilní konstantní (tj. homogenní) řešení,
- ❷ stane se nestabilní,
- ❸ vytvoří se vzor = nekonstantní (nehomogenní) řešení,
- ❹ vzor je stabilní.

Turingův model:

- nestabilita při růstu oblasti,
- = nestabilita řízená difuzí (DDI),

$$d_i \sim \frac{1}{L^2}.$$

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

U obyčejných DR:

- linearizovaná stabilita

$$u'(t) = f(u, t) \quad \rightarrow \quad \tilde{u}'(t) = \mathcal{A}\tilde{u},$$

- daná znaménky vlastních čísel (tj. spektrem) přísl. (konečné) matice;
- nelinearizovaná stabilita.

U parciálních DR:

- „nekonečně mnoho ODR“,
- příslušná „matice“ je (diferenciální) operátor,
- vyšetření spektra,
- dobrý případ – laplaceův operátor,
- pozn.: semigrupy, pseudospektrum.

Podmínky Turingova modelu

RD systém:

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v).$$

Nutné podmínky Turingovy nestability:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &< 0, & b_{11} d_2 + b_{22} d_1 &> 0, \\ \det B &> 0, & (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2 &> 4 d_1 d_2 \det B. \end{aligned}$$

Důsledky:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad d_1 \ll d_2.$$

Tyto podmínky jsou v určitém smyslu nutné i postačující.

Podmínky Turingova modelu

RD systém:

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v).$$

Nutné podmínky Turingovy nestability:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &< 0, & b_{11}d_2 + b_{22}d_1 &> 0, \\ \det B &> 0, & (b_{11}d_2 + b_{22}d_1)^2 &> 4d_1d_2 \det B. \end{aligned}$$

Důsledky:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad d_1 \ll d_2.$$

Tyto podmínky jsou v určitém smyslu nutné i postačující.

Podmínky Turingova modelu

RD systém:

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v).$$

Nutné podmínky Turingovy nestability:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &< 0, & b_{11} d_2 + b_{22} d_1 &> 0, \\ \det B &> 0, & (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2 &> 4 d_1 d_2 \det B. \end{aligned}$$

Důsledky:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad d_1 \ll d_2.$$

Tyto podmínky jsou v určitém smyslu nutné i postačující.

Podmínky Turingova modelu

RD systém:

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v).$$

Nutné podmínky Turingovy nestability:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &< 0, & b_{11} d_2 + b_{22} d_1 &> 0, \\ \det B &> 0, & (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2 &> 4 d_1 d_2 \det B. \end{aligned}$$

Důsledky:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad d_1 \ll d_2.$$

Tyto podmínky jsou v určitém smyslu nutné i postačující.

Podmínky Turingova modelu

RD systém:

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v).$$

Nutné podmínky Turingovy nestability:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &< 0, & b_{11} d_2 + b_{22} d_1 &> 0, \\ \det B &> 0, & (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2 &> 4 d_1 d_2 \det B. \end{aligned}$$

Důsledky:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad d_1 \ll d_2.$$

Tyto podmínky jsou v určitém smyslu nutné i postačující.

RD systém:

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + b_{11} u + b_{12} v + n_1(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + b_{21} u + b_{22} v + n_2(u, v).$$

Nutné podmínky Turingovy nestability:

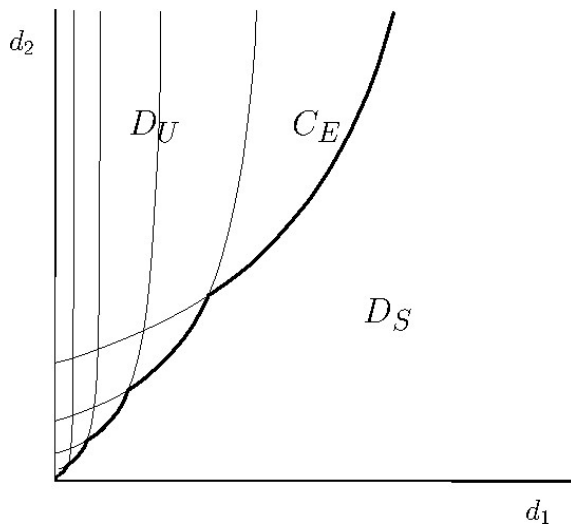
$$\begin{aligned} \operatorname{tr} B &< 0, & b_{11} d_2 + b_{22} d_1 &> 0, \\ \det B &> 0, & (b_{11} d_2 + b_{22} d_1)^2 &> 4 d_1 d_2 \det B. \end{aligned}$$

Důsledky:

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}, \quad d_1 \ll d_2.$$

Tyto podmínky jsou v určitém smyslu nutné i postačující.

Podmínky Turingova modelu II



Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

Možnosti extenze modelu:

- přidání substrátu (třetí nepohyblivé látky),
- jednostranný zdroj,
- geometrie oblasti,
- konečná vs. nekonečná oblast,
- růst oblasti,
- preference směru pohybu – přidání advekce,
- prostorová závislost koeficientů.

Robustnost = jiný pohled na extenzi.

- ① Motivace
 - Turingův model
 - Robustnost modelu
- ② Zobecnění modelu
 - přidání advekce
 - prostorová závislost koeficientů
- ③ Shrnutí

Systém typu reakce-difuze-advekce (RDA systém):

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + e_1 \nabla \cdot u + f(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + e_2 \nabla \cdot v + g(u, v).$$

Fyzikální motivace:

- preference jednoho směru pohybu,
- růst oblasti,
- přítomnost v každém chemickém procesu.

Literatura:

- DIFICI - Differential-flow-induced chemical instability,
- FDO - Flow-distributed oscillations,
- FDS - Flow-and-diffusion structures.

Systém typu reakce-difuze-advekce (RDA systém):

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + e_1 \nabla \cdot u + f(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + e_2 \nabla \cdot v + g(u, v).$$

Fyzikální motivace:

- preference jednoho směru pohybu,
- růst oblasti,
- přítomnost v každém chemickém procesu.

Literatura:

- DIFICI - Differential-flow-induced chemical instability,
- FDO - Flow-distributed oscillations,
- FDS - Flow-and-diffusion structures.

Systém typu reakce-difuze-advekce (RDA systém):

$$\partial_t u = d_1 \Delta u + e_1 \nabla \cdot u + f(u, v),$$

$$\partial_t v = d_2 \Delta v + e_2 \nabla \cdot v + g(u, v).$$

Fyzikální motivace:

- preference jednoho směru pohybu,
- růst oblasti,
- přítomnost v každém chemickém procesu.

Literatura:

- DIFICI - Differential-flow-induced chemical instability,
- FDO - Flow-distributed oscillations,
- FDS - Flow-and-diffusion structures.

Matematické problémy:

- různé okrajové podmínky,
- operátor není samosdružený,
- spektrum se neskládá pouze z vlastních čísel,
- vlastní vektory netvoří ortonormální bázi,
- položení $D = 0$ vs. $\lim_{D \rightarrow 0^+}$,
- signifikantní rozdíl mezi omezenými a neomezenými oblastmi.

Matematické problémy:

- různé okrajové podmínky,
- operátor není samosdružený,
- spektrum se neskládá pouze z vlastních čísel,
- vlastní vektory netvoří ortonormální bázi,
- položení $D = 0$ vs. $\lim_{D \rightarrow 0^+}$,
- signifikantní rozdíl mezi omezenými a neomezenými oblastmi.

Matematické problémy:

- různé okrajové podmínky,
- operátor není samosdružený,
- spektrum se neskládá pouze z vlastních čísel,
- vlastní vektory netvoří ortonormální bázi,
- položení $D = 0$ vs. $\lim_{D \rightarrow 0+}$,
- signifikantní rozdíl mezi omezenými a neomezenými oblastmi.

Matematické problémy:

- různé okrajové podmínky,
- operátor není samosdružený,
- spektrum se neskládá pouze z vlastních čísel,
- vlastní vektory netvoří ortonormální bázi,
- položení $D = 0$ vs. $\lim_{D \rightarrow 0+}$,
- signifikantní rozdíl mezi omezenými a neomezenými oblastmi.

Matematické problémy:

- různé okrajové podmínky,
- operátor není samosdružený,
- spektrum se neskládá pouze z vlastních čísel,
- vlastní vektory netvoří ortonormální bázi,
- položení $D = 0$ vs. $\lim_{D \rightarrow 0+}$,
- signifikantní rozdíl mezi omezenými a neomezenými oblastmi.

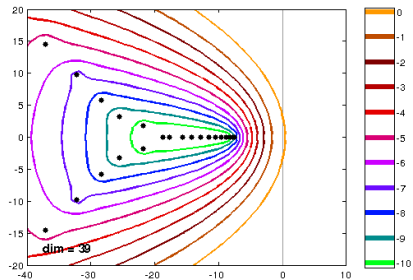
Matematické problémy:

- různé okrajové podmínky,
- operátor není samosdružený,
- spektrum se neskládá pouze z vlastních čísel,
- vlastní vektory netvoří ortonormální bázi,
- položení $D = 0$ vs. $\lim_{D \rightarrow 0+}$,
- signifikantní rozdíl mezi omezenými a neomezenými oblastmi.

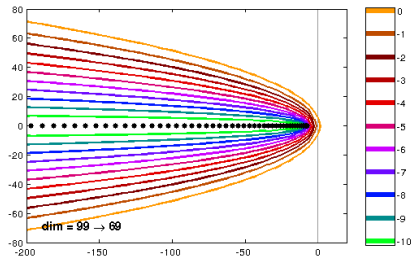
Matematické problémy:

- různé okrajové podmínky,
- operátor není samosdružený,
- spektrum se neskládá pouze z vlastních čísel,
- vlastní vektory netvoří ortonormální bázi,
- položení $D = 0$ vs. $\lim_{D \rightarrow 0^+}$,
- signifikantní rozdíl mezi omezenými a neomezenými oblastmi.

Pseudospektrum DA operátoru (matice)



$N = 40$



$N = 100$

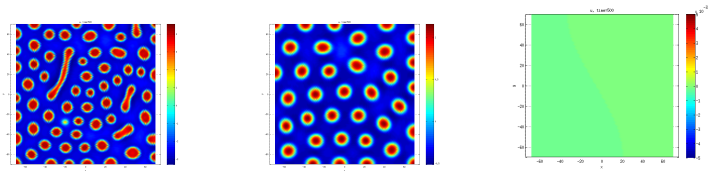
Numerical experiments:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + \alpha u + v - r_2 uv - \alpha r_3 uv^2, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v - \alpha u - \beta v + r_2 uv + \alpha r_3 uv^2.\end{aligned}$$

Prostorová závislost koeficientů – motivace

Numerical experiments:

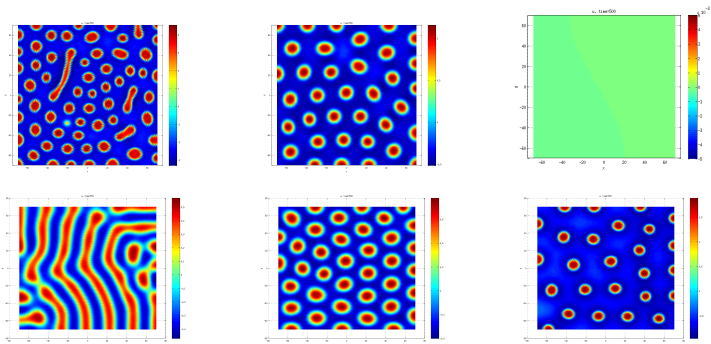
$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + \alpha u + v - r_2 uv - \alpha r_3 uv^2, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v - \alpha u - \beta v + r_2 uv + \alpha r_3 uv^2.\end{aligned}$$



Prostorová závislost koeficientů – motivace

Numerical experiments:

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + \alpha u + v - r_2 uv - \alpha r_3 uv^2, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v - \alpha u - \beta v + r_2 uv + \alpha r_3 uv^2.\end{aligned}$$



$$\partial_t u = d_1(x) \Delta u + f(x, u, v),$$

$$\partial_t v = d_2(x) \Delta v + g(x, u, v).$$

Prostorová závislost je:

- v difuzním koeficientu – hotovo;
- ve funkcích reprezentujících reakce;
- v koeficientu s konstantním zdrojem – hotovo;
- v koeficientu u lineárního členu;

$$\partial_t u = d_1(x) \Delta u + f(x, u, v),$$

$$\partial_t v = d_2(x) \Delta v + g(x, u, v).$$

Prostorová závislost je:

- v difuzním koeficientu – hotovo;
- ve funkcích reprezentujících reakce;
- v koeficientu s konstantním zdrojem – hotovo;
- v koeficientu u lineárního členu;

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(x, u, v), \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(x, u, v).\end{aligned}$$

Prostorová závislost je:

- v difuzním koeficientu – hotovo;
- ve funkcích reprezentujících reakce;
- v koeficientu s konstantním zdrojem – hotovo;
- v koeficientu u lineárního členu;

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + c(x), \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v),\end{aligned}$$

Prostorová závislost je:

- v difuzním koeficientu – hotovo;
- ve funkcích reprezentujících reakce;
- v koeficientu s konstantním zdrojem – hotovo;
- v koeficientu u lineárního členu;

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + c(x), \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v),\end{aligned}$$

Prostorová závislost je:

- v difuzním koeficientu – hotovo;
- ve funkcích reprezentujících reakce;
- v koeficientu s konstantním zdrojem – hotovo;
- v koeficientu u lineárního členu;

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + h(x)u, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v),\end{aligned}$$

Prostorová závislost je:

- v difuzním koeficientu – hotovo;
- ve funkcích reprezentujících reakce;
- v koeficientu s konstantním zdrojem – hotovo;
- v koeficientu u lineárního členu;

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + h(x)u, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v).\end{aligned}$$

Vlastnosti:

- konstantní funkce není řešením;
(konstantní „skorořešení“)
- žádné řešení „jednoduchého“ tvaru;
- žádná informace o stabilitě nějakého řešení.

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + h(x)u, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v).\end{aligned}$$

Vlastnosti:

- konstantní funkce není řešením;
(konstantní „skorořešení“)
- žádné řešení „jednoduchého“ tvaru;
- žádná informace o stabilitě nějakého řešení.

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + h(x)u, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v).\end{aligned}$$

Vlastnosti:

- konstantní funkce není řešením;
(konstantní „skorořešení“)
- žádné řešení „jednoduchého“ tvaru;
- žádná informace o stabilitě nějakého řešení.

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + h(x)u, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v).\end{aligned}$$

Vlastnosti:

- konstantní funkce není řešením;
(konstantní „skorořešení“)
- žádné řešení „jednoduchého“ tvaru;
- žádná informace o stabilitě nějakého řešení.

$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + h(x)u, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v).\end{aligned}$$

Vlastnosti:

- konstantní funkce není řešením;
(konstantní „skorořešení“)
- žádně řešení „jednoduchého“ tvaru;
- žádná informace o stabilitě nějakého řešení.

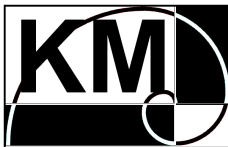
$$\begin{aligned}\partial_t u &= d_1 \Delta u + f(u, v) + h(x)u, \\ \partial_t v &= d_2 \Delta v + g(u, v).\end{aligned}$$

Vlastnosti:

- konstantní funkce není řešením;
(konstantní „skorořešení“)
- žádné řešení „jednoduchého“ tvaru;
- žádná informace o stabilitě nějakého řešení.

- ① Motivace
 - Turingův model
 - Robustnost modelu
- ② Zobecnění modelu
 - přidání advekce
 - prostorová závislost koeficientů
- ③ Shrnutí

- ① Motivace
 - Turingův model
 - Robustnost modelu
- ② Zobecnění modelu
 - přidání advekce
 - prostorová závislost koeficientů
- ③ Shrnutí



Děkuji za pozornost.