Symetrie v ODR a jejich užití k hledání analytických řešení

Ondřej Čajánek, Ondřej Mach

FJFI ČVUT

Obsah

Definice

Předpokládejme množinu symetrií

$$\Gamma_\varepsilon : x^s \to \hat{x}^s(x^1, \dots, x^N; \varepsilon), \qquad s = 1, \dots, N,$$

splňující následující podmínky:
(L1) Γ_ε je difeomorfismus
(L2) Γ_0 je triviální symetrie
(L3) Γ_ε je symetrie na nějakém okolí nuly
(L4) $\Gamma_\varepsilon \Gamma_\delta = \Gamma_{\delta+\varepsilon}$ pro všechna δ, ε dostatečně blízko u nuly
(L5) Každé $\hat{x}^s$ můžeme vyjádřit jako Taylorovu řadu v ε (v nějakém okolí nuly), tedy

$$\hat{x}^s(x^1, \dots, x^N; \varepsilon) = x^s + \varepsilon \xi^s(x^1, \dots, x^N) + O(\varepsilon^2),$$

$$s = 1, \dots, N.$$

Pak množinu symetrií Γ_ε označíme Lieova grupa symetrií.

Příklady transformací:

- škálování: $(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^{\varepsilon} y)$
- posunutí: $(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, y)$
- inverze: $(\hat{x}, \hat{y}) = \left(\frac{x}{1-\varepsilon x}, \frac{y}{1-\varepsilon x}\right)$
- rotace: $(\hat{x}, \hat{y}) = (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon)$

Symetrie nejjednodušší ODR

Zkoumejme $\frac{dy}{dx} = 0$ z hlediska symetrií.
Řešení $y = c, \qquad c \in \mathbb{R}$.

Symetrie nejjednodušší ODR

Zkoumejme $\frac{dy}{dx} = 0$ z hlediska symetrií.
Řešení $y = c, \qquad c \in \mathbb{R}$.

Podmínka symetrie je:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = 0,$$

kde požadujeme invertibilitu, tj.

$$\hat{x}_x \hat{y}_y - \hat{x}_y \hat{y}_x \neq 0.$$

Transformované řešení bude mít tvar

$$\hat{y}(x,c) = \hat{c}(c), \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Derivujeme podle x

$$\hat{y}_x(x,c) = 0, \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Pak z podmínky invetribility budou všechny symetrie tvaru

$$(\hat{x},\hat{y}) = (f(x,y), g(y)), \qquad f_x \neq 0, \quad g_y \neq 0.$$

Pomocí chain rule upravíme podmínku symetrie na

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{D_x\hat{y}}{D_x\hat{x}} = \frac{\hat{y}_x + y'\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y'\hat{x}_y} = \frac{\hat{y}_x}{\hat{x}_x} = 0,$$

Pomocí chain rule upravíme podmínku symetrie na

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{D_x\hat{y}}{D_x\hat{x}} = \frac{\hat{y}_x + y'\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y'\hat{x}_y} = \frac{\hat{y}_x}{\hat{x}_x} = 0,$$

čímž opět dostáváme

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (f(x, y), g(y)), \qquad f_x \neq 0, \quad g_y \neq 0.$$

Uvažujme nyní obecnou ODR 1. řádu

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y).$$

Uvažujme nyní obecnou ODR 1. řádu

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y).$$

Z podmínky symetrie

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \Rightarrow \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}),$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x, y) \Rightarrow \frac{\hat{y}_x + y'\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y'\hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}),$$

což je ekvivalentní s

$$\frac{\hat{y}_x + \omega(x, y)\hat{y}_y}{\hat{x}_x + \omega(x, y)\hat{x}_y} = \omega(\hat{x}, \hat{y}).$$

Další jednoduchý příklad

Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Další jednoduchý příklad

Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Pak podmínka symetrie přechází v

$$\frac{\hat{y}_x + y\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = \hat{y}.$$

Další jednoduchý příklad

Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Pak podmínka symetrie přechází v

$$\frac{\hat{y}_x + y\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = \hat{y}.$$

Zkusme najít symetrii tvaru

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), y),$$

čímž dostaneme

$$\frac{y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = y \Rightarrow \hat{x}_x + y\hat{x}_y = 1, \quad \hat{x}_x \neq 0.$$

Další jednoduchý příklad

Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Pak podmínka symetrie přechází v

$$\frac{\hat{y}_x + y\hat{y}_y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = \hat{y}.$$

Zkusme najít symetrii tvaru

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), y),$$

čímž dostaneme

$$\frac{y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = y \Rightarrow \hat{x}_x + y\hat{x}_y = 1, \quad \hat{x}_x \neq 0.$$

Nejjednodušší řešení takovéto rovnice je

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, y), \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

Symetrie homogenní ODR 1. řádu

Předpokládejme homogenní ODR 1. řádu tvaru

$$\omega_1(x, y)y' = \omega_2(x, y),$$

kde $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)$ jsou homogenní funkce stejného stupně.

Symetrie homogenní ODR 1. řádu

Předpokládejme homogenní ODR 1. řádu tvaru

$$\omega_1(x, y)y' = \omega_2(x, y),$$

kde $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)$ jsou homogenní funkce stejného stupně.

Pro $\omega_1(x, y) \neq 0$ upravíme rovnici na

$$y' = \frac{\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y)} \overset{ozn.}{=} \omega(x, y),$$

kde $\omega(x, y)$ je homogenní funkce 0. stupně.

Symetrie homogenní ODR 1. řádu

Předpokládejme homogenní ODR 1. řádu tvaru

$$\omega_1(x, y)y' = \omega_2(x, y),$$

kde $\omega_1(x, y), \omega_2(x, y)$ jsou homogenní funkce stejného stupně.

Pro $\omega_1(x, y) \neq 0$ upravíme rovnici na

$$y' = \frac{\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y)} \overset{ozn.}{=} \omega(x, y),$$

kde $\omega(x, y)$ je homogenní funkce 0. stupně.

Zkusíme škálovací symetrii $(\hat{x}, \hat{y}) = (e^{\varepsilon}x, e^{\varepsilon}y)$ a dosadíme jí do podmínky symetrie

$$\frac{0 + \omega(x, y)e^{\varepsilon}}{e^{\varepsilon} + \omega(x, y)0} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) = \omega(x, y).$$

Odvození linearizované podmínky symetrie

Odvození linearizované podmínky symetrie

Nejdříve si rozepíšeme $\hat{x}, \hat{y}$ do Taylorova rozvoje pro ε u nuly

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2),$$

$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2),$$

Odvození linearizované podmínky symetrie

Nejdříve si rozepíšeme $\hat{x}, \hat{y}$ do Taylorova rozvoje pro ε u nuly

$$\hat{x} = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2),$$

$$\hat{y} = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2),$$

a dosazením do podmínky symetrie dostaneme

$$\frac{\omega(x,y) + \varepsilon(\eta_x + \omega(x,y)\eta_y) + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon(\xi_x + \omega(x,y)\xi_y) + O(\varepsilon^2)} =$$

$$= \omega(x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2), y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2)).$$

Odvození linearizované podmínky symetrie

Rozepsáním dosazené podmínky symetrie do Taylorova rozvoje pro ε u nuly dostaneme

$$\omega + \varepsilon(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \omega + \varepsilon(\xi\omega_x + \eta\omega_y) + O(\varepsilon^2),$$

Odvození linearizované podmínky symetrie

Rozepsáním dosazené podmínky symetrie do Taylorova rozvoje pro ε u nuly dostaneme

$$\omega + \varepsilon(\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2) + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \omega + \varepsilon(\xi\omega_x + \eta\omega_y) + O(\varepsilon^2),$$

a porovnáním členů $O(\varepsilon)$ dostaneme linearizovanou podmínku pro symetrii

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y\omega^2 = \xi\omega_x + \eta\omega_y.$$

Symetrie rovnice typu $y' = \omega\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$

Symetrie rovnice typu $y' = \omega\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$

Zkusíme hledat tečné pole tvaru

$$\xi(x,y) = c_1x + c_2y + c_3,$$

$$\eta(x,y) = c_4x + c_5y + c_6,$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_6 \in \mathbb{R}$ jsou zatím neurčené konstanty.

Symetrie rovnice typu $y' = \omega\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$

Zkusíme hledat tečné pole tvaru

$$\xi(x,y) = c_1x + c_2y + c_3,$$

$$\eta(x,y) = c_4x + c_5y + c_6,$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_6 \in \mathbb{R}$ jsou zatím neurčené konstanty.

Dosazením předpokládaných tvarů ξ, η dostaneme

$$c_4+(c_5-c_1)\omega-c_2\omega^2 = (c_1x+c_2y+c_3)\omega_x+(c_4x+c_5y+c_6)\omega_y.$$

Pro zjednodušení položíme $c_4 = 0, \quad c_5 = c_1, \quad c_2 = 0$ a dostaneme

$$0 = (c_1 x + c_3)\dot{\omega}\frac{a_1(b_1 x + b_2 y + b_3) - b_1(a_1 x + 2y + a_3)}{(b_1 x + b_2 y + b_3)^2} +$$

$$+(c_1 y + c_6)\dot{\omega}\frac{a_2(b_1 x + b_2 y + b_3) - b_2(a_1 x + a_2 y + a_3)}{(b_1 x + b_2 y + b_3)^2}.$$

Pro $\dot{\omega} \equiv 0$ je rovnice separovatelná, jinak upravíme na

$$0 = (c_1 x + c_3)((a_1 b_2 - a_2 b_1)y + a_1 b_3 - a_3 b_1) +$$

$$(c_1 y + c_6)((a_2 b_1 - a_1 b_2)x + a_2 b_3 - a_3 b_2).$$

Porovnáním členů u x, y v poslední rovnici dostaneme soustavu

$$c_1(a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_6(a_2 b_1 - a_1 b_2) = 0$$

$$c_3(a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_6(a_2 b_3 - a_3 b_2) = 0$$

$$c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0,$$

Porovnáním členů u x, y v poslední rovnici dostaneme soustavu

$$c_1(a_1b_3 - a_3b_1) + c_6(a_2b_1 - a_1b_2) = 0$$

$$c_3(a_1b_3 - a_3b_1) + c_6(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

$$c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

kde je jedním z možných řešení

$$c_1 = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$c_3 = a_3b_2 - a_2b_3$$

$$c_6 = a_1b_3 - a_3b_1.$$

Porovnáním členů u x, y v poslední rovnici dostaneme soustavu

$$c_1(a_1b_3 - a_3b_1) + c_6(a_2b_1 - a_1b_2) = 0$$

$$c_3(a_1b_3 - a_3b_1) + c_6(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

$$c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0,$$

kde je jedním z možných řešení

$$c_1 = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$c_3 = a_3b_2 - a_2b_3$$

$$c_6 = a_1b_3 - a_3b_1.$$

Symetrii dané ODR nám tedy určuje tečné vektorové pole

$$\xi(x, y) = (a_1b_2 - a_2b_1)x + a_3b_2 - a_2b_3$$

$$\eta(x, y) = (a_1b_2 - a_2b_1)y + a_1b_3 - a_3b_1.$$

Symetrie lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Symetrie lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Dosadíme $y' = -F(x)y + G(x)$ do linearizované podmínky symetrie a dostaneme

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)(-F(x)y + G(x)) - \xi_y(-F(x)y + G(x))^2 =$$

$$= \xi(-F'(x)y + G'(x)) - \eta F(x).$$

Symetrie lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Dosadíme $y' = -F(x)y + G(x)$ do linearizované podmínky symetrie a dostaneme

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)(-F(x)y + G(x)) - \xi_y(-F(x)y + G(x))^2 =$$

$$= \xi(-F'(x)y + G'(x)) - \eta F(x).$$

Pro zjednodušení rovnice zvolíme $\xi(x, y) = 0$, $\eta_y(x, y) = 0$, čímž rovnice přejde v

$$\eta_x + \eta F(x) = 0,$$

Symetrie lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Dosadíme $y' = -F(x)y + G(x)$ do linearizované podmínky symetrie a dostaneme

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)(-F(x)y + G(x)) - \xi_y(-F(x)y + G(x))^2 =$$

$$= \xi(-F'(x)y + G'(x)) - \eta F(x).$$

Pro zjednodušení rovnice zvolíme $\xi(x,y) = 0$, $\eta_y(x,y) = 0$, čímž rovnice přejde v

$$\eta_x + \eta F(x) = 0,$$

volíme-li $\eta = \eta(x)$, pak jako jedno z řešení dostaneme

$$\eta_0(x) = e^{-\int F(x)dx}.$$

Vidíme, že η_0 je homogenním řešením dané LDR a zároveň z tečného vektorového pole

$$(\xi, \eta) = (0, \eta_0(x))$$

dostaneme po integraci

$$\xi = \left(\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}, \quad \eta = \left(\frac{d\hat{y}}{d\varepsilon}\right)\Bigg|_{\varepsilon=0}$$

a dosazení podmínky $\varepsilon = 0$ symetrii dané rovnice

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \eta_0(x)).$$

Symetrie konkrétní Riccatiho diferenciální rovnice

Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}.$$

Symetrie konkrétní Riccatiho diferenciální rovnice

Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}.$$

Tečné vektorové pole budeme hledat ve tvaru

$$\xi = \xi(x), \qquad \eta = f(x)y,$$

Symetrie konkrétní Riccatiho diferenciální rovnice

Mějme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}.$$

Tečné vektorové pole budeme hledat ve tvaru

$$\xi = \xi(x), \qquad \eta = f(x)y,$$

dosadíme je do linearizované podmínky symetrie, čímž dostaneme

$$f'(x)y + (f(x) - \xi'(x))(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}) =$$

$$= -\xi(x)\left(\frac{y+1}{x^2} + 3\frac{y^2}{x^4}\right) + f(x)y\left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^3}\right).$$

Srovnáme-li v poslední rovnici členy obsahující stejné mocniny y, dostaneme po úpravách

pro y^2

$$xf(x) + x\xi'(x) - 3\xi(x) = 0,$$

pro y^1

$$x^2 f'(x) - x\xi'(x) + \xi(x) = 0,$$

a pro y^0

$$xf(x) - x\xi'(x) + \xi(x) = 0.$$

Srovnáme-li v poslední rovnici členy obsahující stejné mocniny y, dostaneme po úpravách

pro y^2

$$xf(x) + x\xi'(x) - 3\xi(x) = 0,$$

pro y^1

$$x^2 f'(x) - x\xi'(x) + \xi(x) = 0,$$

a pro y^0

$$xf(x) - x\xi'(x) + \xi(x) = 0.$$

Řešením soustavy dostaneme

$$f(x) = Kx, \quad \xi(x) = Kx^2, \qquad kde \quad K \in \mathbb{R}.$$

Zvolíme-li za $K = 1$ dostaneme pro tečné pole

$$(\xi(x), \eta(x, y)) = (x^2, xy).$$

Pro Bernoulliho rovnici

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha},$$

budeme hledat tečné vektorové pole ve tvaru

$$\xi = \xi(x), \qquad \eta = f(x)y.$$

Dosazením do linearizované podmínky symetrie dostaneme

$$yf' + (f - \xi')\omega = \xi(p'y + q'y^{\alpha}) + \eta(p + \alpha y^{\alpha-1}),$$

$$yf' + fpy + fqy^{\alpha} - \xi' py - \xi' qy^{\alpha} = \xi p' y + \xi q' y^{\alpha} + fpy + \alpha fy^{\alpha}.$$

Porovnáme členy podle mocnin y

$$fq - \xi' q - \alpha f - \xi q' = 0,$$

$$\xi' p + \xi p' - f' = 0$$

Což řeší dvojice

$$\xi = \exp\left(-\int \frac{\alpha p}{q} + \frac{q'}{q} - p\right), \quad f = p\xi.$$

Děkuji za pozornost

Symetrie začínají pomáhat

Předpokládejme, že máme ODR 1. řádu s translační symetrií tvaru

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon), \tag{1}$$

Symetrie začínají pomáhat

Předpokládejme, že máme ODR 1. řádu s translační symetrií tvaru

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon), \tag{1}$$

pak se nám podmínka symetrie zredukuje do

$$\omega(x, y) = \omega(x, y + \varepsilon)$$

pro všechna ε na nějakém okolí nuly.

Symetrie začínají pomáhat

Předpokládejme, že máme ODR 1. řádu s translační symetrií tvaru

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon), \tag{1}$$

pak se nám podmínka symetrie zredukuje do

$$\omega(x, y) = \omega(x, y + \varepsilon)$$

pro všechna ε na nějakém okolí nuly.
Derivací rovnice podle ε a dosazením $\varepsilon = 0$ dostaneme

$$0 = \omega_y(x, y).$$

Tedy ODR 1.řádu se symetrií (1) jsou tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x),$$

Symetrie začínají pomáhat

Předpokládejme, že máme ODR 1. řádu s translační symetrií tvaru

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon), \tag{1}$$

pak se nám podmínka symetrie zredukuje do

$$\omega(x, y) = \omega(x, y + \varepsilon)$$

pro všechna ε na nějakém okolí nuly.
Derivací rovnice podle ε a dosazením $\varepsilon = 0$ dostaneme

$$0 = \omega_y(x, y).$$

Tedy ODR 1.řádu se symetrií (1) jsou tvaru

$$\frac{dy}{dx} = \omega(x),$$

řešením je pak

$$y = \int \omega(x) dx + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Můžeme tedy podobně řešit i ODR 1. řádu mající jinou 1-parametrickou Lieovu grupu symetrií?

Můžeme tedy podobně řešit i ODR 1. řádu mající jinou 1-parametrickou Lieovu grupu symetrií?
Ano, stačí transformovat souřadnice na "šikovné" (kde se symetrie projeví jako translace) a dostáváme ekvivalentní řešitelnou rovnici.

Můžeme tedy podobně řešit i ODR 1. řádu mající jinou 1-parametrickou Lieovu grupu symetrií?
Ano, stačí transformovat souřadnice na "šikovné" (kde se symetrie projeví jako translace) a dostáváme ekvivalentní řešitelnou rovnici.

Pro ilustraci si zvolíme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2 y - y - x}{xy^2 + x^3 + y - x}, \tag{2}$$

která má rotační symetrie

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon).$$

Můžeme tedy podobně řešit i ODR 1. řádu mající jinou 1-parametrickou Lieovu grupu symetrií?
Ano, stačí transformovat souřadnice na "šikovné" (kde se symetrie projeví jako translace) a dostáváme ekvivalentní řešitelnou rovnici.

Pro ilustraci si zvolíme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2 y - y - x}{xy^2 + x^3 + y - x}, \tag{2}$$

která má rotační symetrie

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x \cos\varepsilon - y \sin\varepsilon, x \sin\varepsilon + y \cos\varepsilon).$$

Přepíšeme-li (2) do polarních souřadnic (r, Θ), kde

$$x = r\cos\Theta, \qquad y = r\sin\Theta,$$

Můžeme tedy podobně řešit i ODR 1. řádu mající jinou 1-parametrickou Lieovu grupu symetrií?
Ano, stačí transformovat souřadnice na "šikovné" (kde se symetrie projeví jako translace) a dostáváme ekvivalentní řešitelnou rovnici.

Pro ilustraci si zvolíme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + x^2 y - y - x}{xy^2 + x^3 + y - x}, \tag{2}$$

která má rotační symetrie

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon).$$

Přepíšeme-li (2) do polarních souřadnic (r, Θ), kde

$$x = r \cos \Theta, \qquad y = r \sin \Theta,$$

dostaneme snadno řešitelnou rovnici

$$\frac{dr}{d\Theta} = r(1 - r^2).$$

1-parametrická Lieova grupa rotací přejde v nových souřadnicí v grupu translací

$$(\hat{r}, \hat{\Theta}) = (r, \Theta + \varepsilon).$$

1-parametrická Lieova grupa rotací přejde v nových souřadnicí v grupu translací

$$(\hat{r}, \hat{\Theta}) = (r, \Theta + \varepsilon).$$

Na základě zjištěných symetrií, chceme tedy zavést nové souřadnice

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y)),$$

tak, že

$$(\hat{r}, \hat{s}) \equiv (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \varepsilon).$$

1-parametrická Lieova grupa rotací přejde v nových souřadnicí v grupu translací

$$(\hat{r}, \hat{\Theta}) = (r, \Theta + \varepsilon).$$

Na základě zjištěných symetrií, chceme tedy zavést nové souřadnice

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y)),$$

tak, že

$$(\hat{r}, \hat{s}) \equiv (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \varepsilon).$$

Pak je, v nových souřadnicích, tečný vektor v bodě (r, s) roven $(0, 1)$, tedy

$$\left.\frac{d\hat{r}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left.\frac{d\hat{s}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 1.$$

Použitím chain rule dostaneme soustavu

$$\xi(x,y)r_x + \eta(x,y)r_y = 0,$$

$$\xi(x,y)s_x + \eta(x,y)s_y = 1.$$

Z podmínky na invertibilitu změny souřadnic navíc plyne v nějakém okolí (x,y) podmínka

$$r_x s_y - r_y s_x \neq 0.$$

Pak libovolný pár funkcí $r(x,y), s(x,y)$ splňující takovéto podmínky nazveme kanonickými souřadnicemi.

Získání kanonických souřadnic

Aplikujeme-li na

$$\xi(x,y)s_x + \eta(x,y)s_y = 1,$$

metodu charakteristiky, dostaneme

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = ds.$$

Získání kanonických souřadnic

Aplikujeme-li na

$$\xi(x,y)s_x + \eta(x,y)s_y = 1,$$

metodu charakteristiky, dostaneme

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = ds.$$

Prvním integrálem rovnice

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{3}$$

je obecně nekonstantní funkce $\Phi(x,y)$, která má konstantní hodnotu na každé křivce řešící (3). Pak

$$\Phi_x + f(x,y)\Phi_y = 0, \quad \Phi_y \neq 0.$$

Předpokládejme $\xi(x, y) \neq 0$, pak porovnáním

$$r_x + \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)} r_y = 0 \quad a \quad \Phi_x + f(x, y)\Phi_y = 0,$$

vidíme, že invariantní kanonická souřadnice r je prvním integrálem rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}.$$

Předpokládejme $\xi(x,y) \neq 0$, pak porovnáním

$$r_x + \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} r_y = 0 \quad a \quad \Phi_x + f(x,y)\Phi_y = 0,$$

vidíme, že invariantní kanonická souřadnice r je prvním integrálem rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}.$$

Další souřadnici pak dopočítáme ze vzorce

$$s(r,x) = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(r,x))} \right) \Bigg|_{r=r(x,y)},$$

kde r považujeme za konstantu.

Podobně odvodíme kanonické souřadnice pro $\xi(x, y) = 0$ a $\eta(x, y) \neq 0$

$$r = x, \qquad s = \left(\int \frac{dy}{\eta(r, y)} \right) \Bigg|_{r=x}$$

Obecné nalezení řešení ODR 1. řádu

Předpokládejme tedy, že jsme schopni nalézt symetrii dané ODR.
Pak můžeme takovou rovnici přepsat do nových souřadnic vztahem

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \omega(x,y)s_y}{r_x + \omega(x,y)r_y},$$

kam za (x, y) dosadíme z transformačních vztahů (r, s).

Obecné nalezení řešení ODR 1. řádu

Předpokládejme tedy, že jsme schopni nalézt symetrii dané ODR.
Pak můžeme takovou rovnici přepsat do nových souřadnic vztahem

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + \omega(x,y)s_y}{r_x + \omega(x,y)r_y},$$

kam za (x, y) dosadíme z transformačních vztahů (r, s).
Pak nová rovnice bude tvaru

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r,s),$$

kde (r, s) jsou kanonické souřadnice. Tedy daná ODR je invariantní vůči translacím ve směru s:

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon).$$

Jak jsme již ukázali rovnice se zjednoduší na tvar

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r),$$

a řešením bude

$$s - \int \Omega(r) dr = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Jak jsme již ukázali rovnice se zjednoduší na tvar

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r),$$

a řešením bude

$$s - \int \Omega(r)dr = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Původní řešení pak dostaneme zpětnou transformací

$$s(x,y) - \int^{r(x,y)} \Omega(r)dr = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Konkrétní obecné příklady

Pro lineární diferenciální rovnici tvaru

$$y' + F(x)y = G(x),$$

již Ondra našel Lieovy symetrie

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon\eta_0(x)),$$

kde $\eta_0(x)$ je řešením rovnice bez pravé strany.

Konkrétní obecné příklady

Pro lineární diferenciální rovnici tvaru

$$y' + F(x)y = G(x),$$

již Ondra našel Lieovy symetrie

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon\eta_0(x)),$$

kde $\eta_0(x)$ je řešením rovnice bez pravé strany. Pak tečným vektorovým polem je

$$(\xi, \eta) = (0, \eta_0(x)),$$

a jako kanonické souřadnice dostaneme

$$(r, s) = \left(x, \frac{y}{\eta_0(x)}\right).$$

Převodem LDR do nových souřadnic dostaneme equivalentní rovnici

$$\frac{ds}{dr} = \frac{G(r)}{\eta_0(r)},$$

a jako obecné řešení pak dostaneme

$$\frac{y}{\eta_0(x)} - \int^x \frac{G(r)}{\eta_0(r)} dr = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Homogenní ODR 1. řádu

Podobně můžeme postupovat u homogenních rovnic

$$f' = \omega(x, y),$$

které jsou invariantní vůči škálování a tečné vektorové pole mají ve tvaru

$$(\xi, \eta) = (x, y).$$

Homogenní ODR 1. řádu

Podobně můžeme postupovat u homogenních rovnic

$$f' = \omega(x, y),$$

které jsou invariantní vůči škálování a tečné vektorové pole mají ve tvaru

$$(\xi, \eta) = (x, y).$$

Pak jako kanonické souřadnice dostaneme

$$r = \frac{y}{x}, \qquad s = ln|x|,$$

a po transformaci získáme pro 1. kvadrant upravíme ODR na

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x} + 0}{-\frac{y}{x^2} + \omega(x, y)\frac{1}{x}}.$$

Po dosazení $x = e^s, \quad y = re^s$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\omega(1, r) - r}.$$

$$s(x, y) = \int^{r(x,y)} \frac{r}{\omega(1, r) - r} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Podobně bychom postupovali pro další kvadranty.

Rovnice tvaru $y' = \omega\left(\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{b_1 x + b_2 y + b_3}\right)$

Rovnice tvaru $y' = \omega\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$

Tečné vektorové pole jsme našli ve tvaru

$$\xi(x,y) = c_1x + c_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)x + a_3b_2 - a_2b_3,$$

$$\eta(x,y) = c_1y + c_6 = (a_1b_2 - a_2b_1)y + a_1b_3 - a_3b_1.$$

Rovnice tvaru $y' = \omega\left(\frac{a_1x+a_2y+a_3}{b_1x+b_2y+b_3}\right)$

Tečné vektorové pole jsme našli ve tvaru

$$\xi(x,y) = c_1x + c_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)x + a_3b_2 - a_2b_3,$$

$$\eta(x,y) = c_1y + c_6 = (a_1b_2 - a_2b_1)y + a_1b_3 - a_3b_1.$$

Dosadíme do rovnice

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} = \frac{c_1y + c_6}{c_1x + c_3},$$

a jako kanonické souřadnice dostaneme

$$r = \frac{c_1y + c_6}{c_1x + c_3}, \qquad s = \frac{ln|c_1x + c_3|}{c_1}.$$

Pro $x > -c_3/c_1$ upravíme ODR na

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{c_1 x + c_3}}{-c_1 \frac{c_1 y + c_6}{(c_1 x + c_3)^2} + \frac{c_1}{c_1 x + c_3}\omega},$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{c_1}\frac{1}{\omega - r}.$$

Přičemž argument funkce ω můžeme upravit na

$$\frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{b_1 x + b_2 y + b_3} = \frac{a_1 + a_2 r}{b_1 + b_2 r}.$$

Nakonec získáme

$$s(x, y) = \int^{r(x,y)} \frac{1}{c_1} \frac{1}{\omega\left(\frac{a_1 + a_2 r}{b_1 + b_2 r}\right) - r} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Riccatiho rovnice

Riccatiho rovnice

Pro rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3},$$

s tečným vektorovým polem $(\xi, \eta) = (x^2, xy)$ dostaneme kanonické souřadnice

$$r = \frac{y}{x}, \qquad s = -\frac{1}{x}.$$

Riccatiho rovnice

Pro rovnici

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3},$$

s tečným vektorovým polem $(\xi, \eta) = (x^2, xy)$ dostaneme kanonické souřadnice

$$r = \frac{y}{x}, \qquad s = -\frac{1}{x}.$$

Po transformaci získáme

$$\frac{ds}{dr} = \frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)}$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{1+r^2},$$

$$-\frac{1}{x} = acrtg\left(\frac{y}{x}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Řešením původní Riccatiho rovnice je

$$y = x\,\mathrm{tg}\left(c - \frac{1}{x}\right), \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Sestavení ODR podle dané symetrie

Opačným přístupem můžeme clasifikovat všechny ODR 1. řádu, které jsou invariantní vůči předem zvolené symetrii. Zvolená Lieova grupa symetrií nám tedy určí kanonické souřadnice $r(x, y), s(x, y)$ a z

$$\frac{s_x + \omega s_y}{r_x + \omega r_y} = \Omega(r),$$

dostaneme

$$y' = -\frac{s_x(x, y) - \Omega(r(x, y))r_x(x, y)}{s_y(x, y) - \Omega(r(x, y))r_y(x, y)},$$

kde Ω je libovolná hladká funkce.

Příklad vytvoření ODR 1. řádu

Zvolíme si např. druh škálování $(\xi, \eta) = (x, -y)$, pak

$$r = \frac{y}{x}, \qquad s = ln|x|,$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{x} + \Omega\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{x}}{0 - \Omega\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{y}},$$

$$y' = \frac{y + \Omega\left(\frac{x}{y}\right)y}{\Omega\left(\frac{x}{y}\right)x}.$$

kde Ω je libovolná hladká funkce.

Děkuji za pozornost