

# Metody algebry a funkcionální analýzy v aplikacích

Telč, Česká republika  
17.–22. 8. 2015

*Symetrie v obyčejných diferenciálních rovnicích a jejich užití k hledání analytických řešení*

Ondřej Čajánek, Ondřej Mach

**Abstrakt:** Úkolem bude nastudování úvodních kapitol velmi dobré knihy na toto téma a přepsání postupu řešení studentem zvolených (ideálně všech) řešitelných úloh ODR prvního řádu z kurzu na katedře (lineární ODR, separovaná, separovatelná, Bernoulliho, exaktní, ...) pomocí teorie symetrií. Výsledkem je, že bez znalostí klasifikace a postupu řešení daných ODR stačí nalézt symetrie rovnice a postup řešení bude sám odhalen.

*Poruchová teorie pro lineární operátory na vektorových prostorech konečné dimenze*  
Hana Dlouhá

**Abstrakt:** V přehledové přednášce budou představeny hlavní výsledky z první a druhé kapitoly bible poruchové teorie lineárních operátorů od Tosia Katoa.

*Nodální čáry na omezených dvourozměrných oblastech*  
Marie Fialová

**Abstrakt:** Příspěvek je zaměřen na úvod do spektrální teorie samosdružených operatorů. Prostor bude věnován zejména laplaciánu s dirichletovskou hraniční podmínkou, který se vyskytuje v důležitých fyzikálních rovnicích jako je vedení tepla, vlnění a Schrödingerova rovnice. Budou uvedeny výsledky nodální hypotézy. Z numerické aproximace budou předvedeny nodální čáry dirichletovského laplaciánu na kruhové výseči a porovnány s analytickými výsledky daného problému.

## *Ortogonalní polynomy a Askeyova–Wilsonova algebra*

Daniel Gromada

**Abstrakt:** Různé rodiny tzv. klasických ortogonálních polynomů byly v roce 1985 R. Askeyem a J. A. Wilsonem roztříděny do tzv. Askeyova schématu ortogonálních polynomů. V roce 1991 A. Žedanov definoval algebru, kterou pojmenoval Askeyova–Wilsonova, a ukázal, že s pomocí klasifikace jejích reprezentací lze nagenarovat tu nejobecnější třídu diskretních  $q$ -ortogonálních polynomů Askeyova schématu. V přednášce definujeme pojem ortogonálních polynomů a uvedeme některá důležitá tvrzení. Dále ukážeme, jak souvisí s tzv. Leonardovými páry (dvojice operátorů ve speciálním tvaru) a jak lze z této korespondence odvodit některé jejich důležité vlastnosti (tříčlenná rekurence, diferenční rovnice, relace ortogonality a podobně). Nakonec ukážeme, jak lze Leonardovy páry, a tím i posloupnosti ortogonálních polynomů, získat z klasifikace reprezentací některých algeber.

## *Spektrální teorie pro metamateriály*

Filip Hložek

**Abstrakt:** Seznámíme se s metamateriály – materiály se záporným indexem lomu, jejich objevením a možnými způsoby jejich využití. Speciálně se zaměříme na způsob realizace neviditelnosti, kterou metamateriály teoreticky umožňují. Podíváme se na obtíže při konstrukci pláště neviditelnosti (praktické i teoretické) a pokusíme se o popis pomocí spektrální teorie.

## *Úvod do neomezených operátorů*

Tomáš Kalvoda, Petra Košťáková

**Abstrakt:** Tato úvodní přednáška si klade za cíl přehledně probrat základní pojmy týkající se neomezených operátorů na Hilbertových prostorech. Budeme se věnovat uzávěru operátoru, sdruženému operátoru a spektru uzavřeného operátoru. Probírané pojmy budeme demonstrovat na zajímavých příkladech.

*Robustnost Turingova modelu*

Michal Kozák

**Abstrakt:** Turingův model je hojně používaným nástrojem k popsání vzniku prostorových struktur jevů v přírodě. I přes to, že výsledky očividně korespondují s reálnými případy, zůstává otázka, zda-li je tento model dostatečně robustní (vzhledem k malým odchylkám daných například chybou měření nebo mírou idealizace jevu), a tedy vhodný ke všem aplikacím, ke kterým se používá. Na této přednášce bude Turingův model nejdříve krátce představen, poté diskutována robustnost vzhledem k přidání malé advekce nebo prostorové závislosti koeficientů.

*Repér pro prostorové křivky, jenž funguje vždy*

David Krejčířík

**Abstrakt:** Ukážeme, že existuje více způsobů, jak přirozeně popsat pohyb cestovatele po křivce v prostoru, a že méně známý repér definovaný paralelním přenosem má oproti Frenetovu popisu značné výhody.

*O pseudospektru harmonického oscilátoru s imaginárním kubickým potenciálem*

Radek Novák

**Abstrakt:** V této prezentaci se budeme zabývat studiem Schrödingerova operátoru s potenciálem daným sumou potenciálu harmonického oscilátoru a imaginárního kubického oscilátoru a zaměříme se na jeho pseudospektrální vlastnosti. Shrňme dosavadní výsledky o tomto operátoru a zdůrazníme důležitost studia jeho pseudospektrálních vlastností. Tyto budeme zkoumat s využitím škálovacích technik a semiklasických metod. Dokážeme existenci pseudovlastních hodnot velmi vzdálených od spektra, což v důsledku vede k nestabilitě operátoru vůči malým poruchám a vylučuje možnost, že by se operátor omezenou transformací s omezenou inverzí dal převést na samosdružený operátor. Ukážeme, že vlastní funkce operátoru tvoří hustou množinu v Hilbertově prostoru kvadraticky integrovatelných funkcí, avšak netvoří Schauderovu bázi.

*Remarks on the convergence of pseudospectra*

Petr Siegl

**Abstrakt:** The pseudospectra may be defined using a strict or non strict inequality. The connection between these two definitions is related to the question whether a linear operator can have constant resolvent norm on an open set. We present several results that exclude this phenomenon, in particular the new global minimum theorem. Then we discuss the convergence of pseudospectra for operators acting in different Hilbert spaces and applications to the domain truncation method for Schrödinger operators. The talk is based mainly on joint work with Sabine Bögli:

[1] S. Bögli, P. Siegl. Remarks on the convergence of pseudospectra. *Integral Equation Operator Theory* 80 (2014), 303–321.

*Kvantové procházky a kvantové vyhledávací algoritmy*

Stanislav Skoupý

**Abstrakt:** Ve své prezentaci stručně uvedu kvantové procházky jako kvantové zobecnění klasických procházek. Zmíním jejich stručné vlastnosti, a jak se liší distribuce pravděpodobnosti kvantové procházky od její klasické verze. Představím Groverův vyhledávací algoritmus a popíšu, jak algoritmus funguje a jaké jsou odhady jeho složitosti. Poté představím vyhledávací algoritmus založený na kvantové procházce a opět ho rozeberu z hlediska složitosti. Nakonec stručně porovnáám oba typy algoritmů a shrnu nejdůležitější rozdíly.

*Princip minimaxu a aplikace*

Vojtěch Šmíd

**Abstrakt:** Odvodíme variační formulky charakterisující vlastní hodnoty samodružených operátorů na konečně dimensionálních vektorových prostorech. Jako aplikaci odvodíme princip monotonicity a Weylův teorém.

*Isingův spinový model*  
František Štampach

**Abstrakt:** V přednášce představíme dnes již klasický model statistické fyziky popisující dynamiku systému částic interagujících s nejbližšími sousedy. Matematicky představuje Isingův model Markovův řetězec, a proto hlavní matematickým aparátem pro jeho studium je teorie náhodných procesů. Ukážeme si ale, že pro úplný popis dynamiky systému je nutná také spektrální analýza lineárních operátorů. V přednášce bude kladen důraz na rigorózní matematickou formulaci modelu. Ukážeme si konkrétní příklady pro nejjednodušší situace a naznačíme roli Jacobiho matic v modelech s tzv. Glauberovou dynamikou. Přednáška bude spíše přehledová a je určena pro neexperty.

*Úvod do teorie ortogonálních polynomů*  
Pavel Šťovíček

**Abstrakt:** Cílem přednášky je podat stručný nástin základů teorie ortogonálních polynomů. V přehledu jsou připomenuty klasické ortogonální polynomy. Dále jsou definovány momentový funkcionál a ortogonální polynomiální posloupnost. Je zaveden pojem fundamentálního rekurentního vztahu a zformulována základní Favardova věta. Rovněž jsou zmíněny vlastnosti nul ortogonální polynomiální posloupnosti. Je rozebrán Hamburgerův momentový problém a související výsledky jako je kritérium existence jednoznačného řešení (deterministický případ). V případě nedeterministickém je vysvětlena Nevanlinnova parametrizace všech řešení. Rovněž je zmíněna souvislost s Jacobiho maticemi. Podle časových možností může být naznačena souvislost s teorií řetězových zlomků a zformulována věta o Gaussově kvadratuře. Jako příklad ortogonálních polynomů, které nejsou odvozeny coby řešení určité diferenciální rovnice druhého řádu, lze uvést Lommelovy polynomy.

- [1] N.I Akhiezer: "The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis", (Oliver and Boyd, Edinburgh, 1965)  
[2] T.S. Chihara: "An Introduction to Orthogonal Polynomials", (Gordon and Breach, Science Publishers, New York, 1978)

*Magnetické Laplaciány s absolutně spojitým spektrem*

Matěj Tušek

**Abstrakt:** V roce 1985 představil Akira Iwatsuka několik zajímavých Schrödingerovských operátorů, jejichž spektrum je čistě absolutně spojitě. V přednášce shrnu Iwatsukovy proslulé výsledky, výsledky autorů na jeho práci navazujících a připojím i několik nových výsledků vlastních, které jsem získal ve spolupráci s Pavlem Exnerem.

*Řízená klasifikace síťového provozu*

Patrik Urban

**Abstrakt:** Prezentace bude věnována použití standardních klasifikačních algoritmů k vytvoření data-driven algoritmů sloužících ke klasifikaci síťového provozu. Konkrétně se bude jednat o použití takovýchto algoritmů k rozeznání video streaming přenosů. V rámci tohoto bude video přenos popsán na základě proxy logů a budou diskutovány různé přístupy ke klasifikaci (statistický/behaviorální). Bude ukázáno porovnání více standardních klasifikačních algoritmů (SVM,LDA) a provedena diskuse výsledků.

*Entropické relace neurčitosti*

Daniel Vašata

**Abstrakt:** Heisenbergovy relace neurčitosti pro polohu a hybnost představují důležitý princip kvantové mechaniky. Jsou formulovány jako spodní mez hodnoty součinu rozptylů vlnové funkce a její Fourierovy transformace. Zajímavou alternativou těchto relací jsou entropické relace neurčitosti formulované pomocí informační (Shannonovy) entropie. Tyto relace si v přednášce odvodíme a ukážeme jejich vztah ke klasickým Heisenbergovým relacím.

*Frenetův repér prostorových křivek a kdy to nefunguje*

Kateřina Zahradová

**Abstrakt:** Odvodíme Frenetovy formulky pro křivky v třídimensionálním euklidovském prostoru a ukážeme příklady křivek, pro něž Frenetův repér neexistuje.