Úvod do pseudospektra

Radek Novák

Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering
Czech Technical University in Prague

Department of Theoretical Physics
Nuclear Physics Institute, Řež

Jean Leray Laboratory of Mathematics
University of Nantes

http://gemma.ujf.cas.cz/∼r.novak

Metody algebry a funkcionální analýzy v aplikacích

Telč, August 18, 2015

Obsah

- Spektrum - opakování
- Definice pseudospektra
- Vlastnosti

Obsah

- Spektrum - opakování
- Definice pseudospektra
- Vlastnosti

Reference:

Spectra and Pseudospectra:
The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators
Lloyd N. Trefethen & Mark Embree
Princeton University Press, 2005

Linear operators and their spectra
E. B. Davies
Cambridge University Press, 2007

Elements of Spectral Theory without the Spectral Theorem
D. Krejčiřík, P. Siegl
John Wiley & Sons, Inc., 2015

Spektrum – matice

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Pak

$$\sigma(\mathbb{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{C}^N, \vec{x} \neq \vec{0}, \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\right\}.$$

λ se nazývá vlastní číslo, $\vec{x}$ vlastní vektor

Spektrum – matice

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Pak

$$\sigma(\mathbb{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{C}^N, \vec{x} \neq \vec{0}, \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \right\}.$$

λ se nazývá vlastní číslo, $\vec{x}$ vlastní vektor

Hermitovská matice ($\mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}}^T = \mathbb{A}^*$): $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$

Spektrum – matice

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Pak

$$\sigma(\mathbb{A}) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{C}^N, \vec{x} \neq \vec{0}, \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}\right\}.$$

λ se nazývá vlastní číslo, $\vec{x}$ vlastní vektor

Hermitovská matice ($\mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}}^T = \mathbb{A}^*$): $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$

Důkaz

- $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^*\mathbb{A}^* = \overline{\lambda}\vec{x}^*$
- $(\lambda - \overline{\lambda})\vec{x}^*\vec{x} = \vec{x}^*(\lambda - \overline{\lambda})\vec{x} = \vec{x}^*\mathbb{A}\vec{x} - \vec{x}^*\mathbb{A}^*\vec{x} = 0$
- zároveň ale $\vec{x}^*\vec{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}$

Spektrum – matice

Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$. Pak

$$\sigma(\mathbb{A}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{C}^N, \vec{x} \neq \vec{0}, \mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \right\}.$$

λ se nazývá vlastní číslo, $\vec{x}$ vlastní vektor

Hermitovská matice ($\mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}}^T = \mathbb{A}^*$): $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{R}$

Důkaz

- $\mathbb{A}\vec{x} = \lambda\vec{x} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^* \mathbb{A}^* = \overline{\lambda}\vec{x}^*$
- $(\lambda - \overline{\lambda})\vec{x}^*\vec{x} = \vec{x}^*(\lambda - \overline{\lambda})\vec{x} = \vec{x}^*\mathbb{A}\vec{x} - \vec{x}^*\mathbb{A}^*\vec{x} = 0$
- zároveň ale $\vec{x}^*\vec{x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda}$

Nehermitovská matice ($\mathbb{A} \neq \overline{\mathbb{A}}^T$): $\sigma(\mathbb{A}) \not\subset \mathbb{R}$

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \sigma(\mathbb{B}) = \{1, \mathrm{i}\}$$

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma(\mathbb{C}) = \{-\mathrm{i}, \mathrm{i}\}$$

Spektrum – operátory

Definici spektra pro matice můžeme přeformulovat:

- nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$
- pak $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda) \neq \emptyset$
- matice $\mathbb{A} - \lambda$ není invertibilní

$\Rightarrow$ $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists\, (\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\}$

Spektrum – operátory

Definici spektra pro matice můžeme přeformulovat:

- nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$
- pak $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda) \neq \varnothing$
- matice $\mathbb{A} - \lambda$ není invertibilní

$\Rightarrow$ $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists\, (\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\}$

Dále $\mathscr{H}$ je (nekonečněrozměrný) Hilbertův prostor,
T uzavřený operátor působící na funkce z $\mathscr{H}$.

Spektrum – operátory

Definici spektra pro matice můžeme přeformulovat:

- nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$
- pak $\mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \lambda) \neq \varnothing$
- matice $\mathbb{A} - \lambda$ není invertibilní

$\Rightarrow$ $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists\, (\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\}$

Dále $\mathscr{H}$ je (nekonečněrozměrný) Hilbertův prostor,
T uzavřený operátor působící na funkce z $\mathscr{H}$.

Analogicky definuje spektrum pro operátor T:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists (T - \lambda)^{-1} \text{jako omezený operátor na } \mathscr{H}\}$$

Spektrum – operátory

Definici spektra pro matice můžeme přeformulovat:

- nechť $\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$
- pak $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \lambda) \neq \varnothing$
- matice $\mathbb{A} - \lambda$ není invertibilní

$\Rightarrow$ $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists\, (\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\}$

Dále $\mathscr{H}$ je (nekonečněrozměrný) Hilbertův prostor,
T uzavřený operátor působící na funkce z $\mathscr{H}$.

Analogicky definuje spektrum pro operátor T:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists (T - \lambda)^{-1} \text{jako omezený operátor na } \mathscr{H}\}$$

Dělení spektra:

- bodové: $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \nexists\, (T - \lambda)^{-1}\}$
- spojité: $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\, (T - \lambda)^{-1}, \overline{\operatorname{Ran}(T - \lambda)} = \mathscr{H}\}$
- reziduální: $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\, (T - \lambda)^{-1}, \overline{\operatorname{Ran}(T - \lambda)} \neq \mathscr{H}\}$

Spektrum – operátory

Samosdružený operátor ($T = T^*$):

- $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$
- $\sigma_r(T) = \varnothing$

Spektrum – operátory

Samosdružený operátor ($T = T^*$):

- $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

  Důkaz

  - nechť $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + \mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda \in \sigma(T), \psi \in \mathscr{H}$
  - $\|(A-\lambda)\psi\|^2 = \|(A-\operatorname{Re}\lambda)\psi\|^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2\|\psi\|^2 \geq |\operatorname{Im}\lambda|^2\|\psi\|^2$
  - Weylovo kritérium: $\operatorname{Im}\lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \notin \sigma(T)$
- $\sigma_r(T) = \emptyset$

Spektrum – operátory

Samosdružený operátor ($T = T^*$):

- $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

  Důkaz

  - nechť $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + \mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda \in \sigma(T), \psi \in \mathscr{H}$
  - $\|(A-\lambda)\psi\|^2 = \|(A-\operatorname{Re}\lambda)\psi\|^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2\|\psi\|^2 \geq |\operatorname{Im}\lambda|^2\|\psi\|^2$
  - Weylovo kritérium: $\operatorname{Im}\lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \notin \sigma(T)$
- $\sigma_r(T) = \varnothing$

Nesamosdružený operátor ($T \neq T^*$):

- $\sigma(T) \not\subset \mathbb{R}$

Spektrum – operátory

Samosdružený operátor ($T = T^*$):

- $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$

  Důkaz

  - nechť $\lambda = \operatorname{Re}\lambda + \mathrm{i}\operatorname{Im}\lambda \in \sigma(T), \psi \in \mathscr{H}$
  - $\|(A-\lambda)\psi\|^2 = \|(A-\operatorname{Re}\lambda)\psi\|^2 + |\operatorname{Im}\lambda|^2\|\psi\|^2 \geq |\operatorname{Im}\lambda|^2\|\psi\|^2$
  - Weylovo kritérium: $\operatorname{Im}\lambda \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \notin \sigma(T)$

- $\sigma_r(T) = \emptyset$

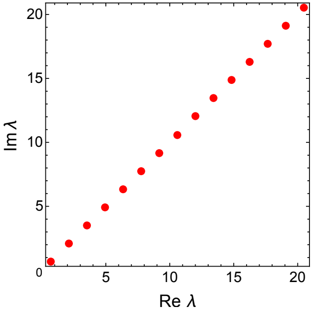
Nesamosdružený operátor ($T \neq T^*$):

- $\sigma(T) \not\subset \mathbb{R}$

Rotovaný oscilátor [Davies 99]:

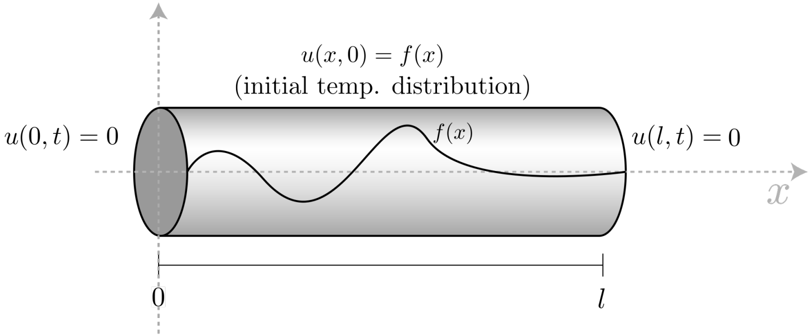
$$R = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \mathrm{i}x^2 \text{ na } L^2(\mathbb{R})$$

$$\sigma(R) = \{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}(2n+1) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$



Spektrum – A k čemu je to dobré?

- Diagonalizace a separace proměnných



Fourierův problém vedení tepla

Spektrum – A k čemu je to dobré?

- Diagonalizace a separace proměnných
- Rezonance

Tacoma Narrows Bridge (1940)

Spektrum – A k čemu je to dobré?

- Diagonalizace a separace proměnných
- Rezonance
- Asymptotický vývoj a stabilita

Zvuk zvonu

Spektrum – A k čemu je to dobré?

- Diagonalizace a separace proměnných
- Rezonance
- Asymptotický vývoj a stabilita

Proč potřebujeme něco víc?

- spektrum vhodné pro popis systémů s „pěkným“ systémem vlastních funkcí
- samosdružené, normální operátory

? nenormální operátory – spektrum pro popis nestačí

Spektrum – A k čemu je to dobré?

- Diagonalizace a separace proměnných
- Rezonance
- Asymptotický vývoj a stabilita

Proč potřebujeme něco víc?

- spektrum vhodné pro popis systémů s „pěkným“ systémem vlastních funkcí
- samosdružené, normální operátory

? nenormální operátory – spektrum pro popis nestačí

"In the highly non-normal case, . . . , the location of the eigenvalues may be as fragile an indicator of underlying character as the hair color of a Hollywood actor."

Časový vývoj

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af$$
$$f(0) = f_0$$

A samosdružený pozitivní:

- řešení $f(t) = \mathrm{e}^{-tA} f_0$
- $\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-t \inf \sigma(A)}$

Časový vývoj

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af$$
$$f(0) = f_0$$

A samosdružený pozitivní:

- řešení $f(t) = \mathrm{e}^{-tA} f_0$
- $\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-t \inf \sigma(A)}$

A normální, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_+$

- $\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-t \inf \mathrm{Re}\, \sigma(A)}$

Časový vývoj

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af$$
$$f(0) = f_0$$

A samosdružený pozitivní:

- řešení $f(t) = \mathrm{e}^{-tA} f_0$
- $\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-t \inf \sigma(A)}$

A normální, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_+$

- $\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-t \inf \operatorname{Re} \sigma(A)}$

A nenormální

- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\sigma(\mathbb{A}) = \{0\}$

$\Rightarrow$ očekávali bychom $\|\mathrm{e}^{-t\mathbb{A}}\| = 0$

Časový vývoj

$$\frac{\partial f}{\partial t} = Af$$
$$f(0) = f_0$$

A samosdružený pozitivní:

- řešení $f(t) = \mathrm{e}^{-tA} f_0$
- $\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-t \inf \sigma(A)}$

A normální, $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_+$

- $\|\mathrm{e}^{-tA}\| = \mathrm{e}^{-t \inf \operatorname{Re} \sigma(A)}$

A nenormální

- $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $\sigma(\mathbb{A}) = \{0\}$

$\Rightarrow$ očekávali bychom $\|\mathrm{e}^{-t\mathbb{A}}\| = 0$

- $\mathrm{e}^{-t\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $\|\mathrm{e}^{-t\mathbb{A}}\| > 1$ pro $t > 0$

Časový vývoj

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Časový vývoj

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A}$ červená, $\mathbb{B}$ modrá

Pseudospektrum

Pro matici a operátor definujeme ε-pseudospektrum

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\| (T-\lambda)^{-1} \right\| > \varepsilon^{-1} \right\}$$

Pseudospektrum

Pro matici a operátor definujeme ε-pseudospektrum

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\| (T-\lambda)^{-1} \right\| > \varepsilon^{-1} \right\}$$

Proč?

- Tradičně – „Je $T - \lambda$ singulární?“
- Nově – „Je $\|(T-\lambda)^{-1}\|$ velká?“

Pseudospektrum

Pro matici a operátor definujeme ε-pseudospektrum

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\| (T-\lambda)^{-1} \right\| > \varepsilon^{-1} \right\}$$

Proč?

- Tradičně – „Je $T - \lambda$ singulární?“
- Nově – „Je $\|(T-\lambda)^{-1}\|$ velká?“

Historie

1967: Varah – r-aproximate eigenvalues

1975: Landau – ε-aproximate eigenvalues

1982: Godunov et al. – spectral portrait

1990: Trefethen – ε-pseudospectrum

1992: Hinrichsen, Pritchard – spectral value set

Pseudospektrum – matice

Normální matice ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$):

$\mathbb{A} = \mathbb{U}\,\mathbb{D}\,\mathbb{U}^{-1}$, kde

- $\mathbb{U}$ je unitární ($\mathbb{U}^* = U^{-1}$)
- $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}$, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$

$$\|(\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\| = \|(\mathbb{D} - \lambda)^{-1}\| = \max_{1 \le j \le N} \left\{ \frac{1}{|\lambda_j - \lambda|} \right\}$$

Pseudospektrum – matice

Normální matice ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$):

$\mathbb{A} = \mathbb{U}\,\mathbb{D}\,\mathbb{U}^{-1}$, kde

- $\mathbb{U}$ je unitární ($\mathbb{U}^* = U^{-1}$)
- $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}$, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$

$$\|(\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\| = \|(\mathbb{D} - \lambda)^{-1}\| = \max_{1 \le j \le N} \left\{ \frac{1}{|\lambda_j - \lambda|} \right\}$$

$\Rightarrow \sigma_\epsilon(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(\mathbb{A})) < \varepsilon\}$

Pseudospektrum – matice

Normální matice ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$):

$\mathbb{A} = \mathbb{U}\,\mathbb{D}\,\mathbb{U}^{-1}$, kde

- $\mathbb{U}$ je unitární ($\mathbb{U}^* = U^{-1}$)
- $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}$, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$

$$\|(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\| = \|(\mathbb{D}-\lambda)^{-1}\| = \max_{1\le j\le N}\left\{\frac{1}{|\lambda_j-\lambda|}\right\}$$

$\Rightarrow \sigma_\epsilon(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathbb{A})) < \varepsilon\}$

Nenormální matice ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* \neq \mathbb{A}^*\mathbb{A}$):

$$\|(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\| \geq \max_{1\le j\le N}\left\{\frac{1}{|\lambda_j-\lambda|}\right\}$$

Pseudospektrum – matice

Normální matice ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$):

$\mathbb{A} = \mathbb{U}\,\mathbb{D}\,\mathbb{U}^{-1}$, kde

- $\mathbb{U}$ je unitární ($\mathbb{U}^* = U^{-1}$)
- $\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_N \end{pmatrix}$, $\sigma(\mathbb{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$

$$\|(\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\| = \|(\mathbb{D} - \lambda)^{-1}\| = \max_{1 \le j \le N} \left\{ \frac{1}{|\lambda_j - \lambda|} \right\}$$

$\Rightarrow \sigma_\epsilon(\mathbb{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathbb{A})) < \varepsilon\}$

Nenormální matice ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* \neq \mathbb{A}^*\mathbb{A}$):

$$\|(\mathbb{A} - \lambda)^{-1}\| \geq \max_{1 \le j \le N} \left\{ \frac{1}{|\lambda_j - \lambda|} \right\}$$

$\Rightarrow \sigma_\epsilon(\mathbb{A}) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(\mathbb{A})) < \varepsilon\}$

Pseudospektrum – operátory

Normální operátory ($TT^* = T^* T$)

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| = \frac{1}{\mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T))}$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{dist}(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon\}$$

Pseudospektrum – operátory

Normální operátory ($TT^* = T^*T$)

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon\}$$

Nenormální operátory ($TT^* \neq T^*T$)

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon\}$$

Pseudospektrum – operátory

Normální operátory ($TT^* = T^*T$)

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon\}$$

Nenormální operátory ($TT^* \neq T^*T$)

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon(T) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon\}$$

Existuje-li Ω tak, že $T = \Omega\, N\, \Omega$, kde N je normální, Ω a Ω^{-1} jsou omezené:

$$\sigma_\varepsilon(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) < \kappa\varepsilon\},$$

kde $\kappa = \|\Omega\|\|\Omega^{-1}\|$ (kondiční číslo).

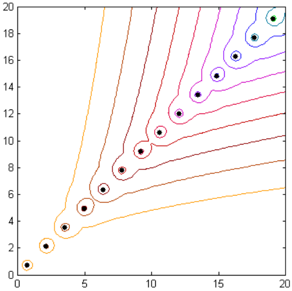
Pseudospektrum – operátory

Normální operátory ($TT^* = T^*T$)

$$\|(T-\lambda)^{-1}\| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$$

$$\Rightarrow \sigma_\epsilon(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T)) < \varepsilon\}$$

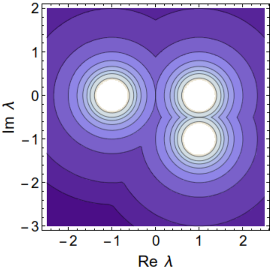
Nenormální operátory ($TT^* \neq T^*T$)



Pseudospektrum rotovaného oscilátoru

Příklady

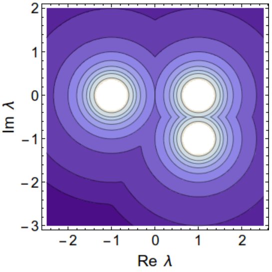
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

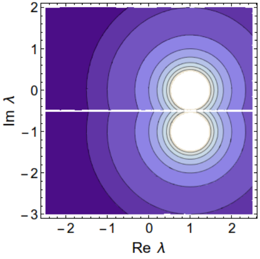


$\varepsilon^{-1} = 0.4,\ 0.5,\ 0.75,\ 1,\ 1.25,\ 1.5,\ 1.75,\ 2,\ 2.5,\ 3$ (od vnější po vnitřní)

Příklady

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

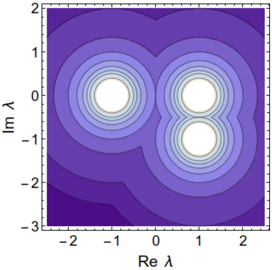


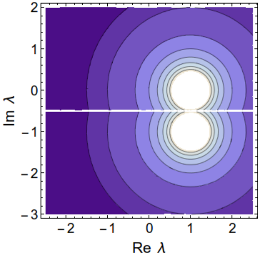


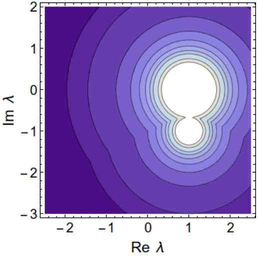
$\varepsilon^{-1} = 0.4,\ 0.5,\ 0.75,\ 1,\ 1.25,\ 1.5,\ 1.75,\ 2,\ 2.5,\ 3$ (od vnější po vnitřní)

Příklady

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$







$\varepsilon^{-1} = 0.4,\ 0.5,\ 0.75,\ 1,\ 1.25,\ 1.5,\ 1.75,\ 2,\ 2.5,\ 3$ (od vnější po vnitřní)

Vlastnosti

- $\sigma_{\varepsilon_1}(T) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(T)$ pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

Vlastnosti

- $\sigma_{\varepsilon_1}(T) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(T)$ pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$
- $\sigma(T) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{\varepsilon}(T)$

Vlastnosti

- $\sigma_{\varepsilon_1}(T) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(T)$ pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$
- $\sigma(T) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(T)$
- Spektrální stabilita

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\| < \varepsilon} \sigma(T + V)$$

Vlastnosti

- $\sigma_{\varepsilon_1}(T) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(T)$ pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$
- $\sigma(T) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(T)$
- Spektrální stabilita
$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\| < \varepsilon} \sigma(T + V)$$
- Pseudomódy: $\lambda \in \sigma_\varepsilon(T) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$ nebo $\exists \psi \in \mathrm{Dom}(T)$ tak, že
$$\|(T - \lambda)\psi\| < \varepsilon \|\psi\|$$

Vlastnosti

- $\sigma_{\varepsilon_1}(T) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(T)$ pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$
- $\sigma(T) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(T)$
- Spektrální stabilita

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\| < \varepsilon} \sigma(T + V)$$

- Pseudomódy: $\lambda \in \sigma_\varepsilon(T) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$ nebo $\exists \psi \in \mathrm{Dom}(T)$ tak, že

$$\|(T - \lambda)\psi\| < \varepsilon \|\psi\|$$

- $\sigma_\varepsilon(T) \neq \emptyset$ pro všechna $\varepsilon > 0$

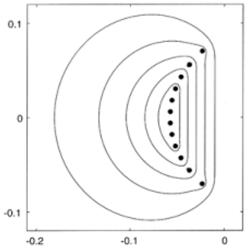
Vlastnosti

- $\sigma_{\varepsilon_1}(T) \subset \sigma_{\varepsilon_2}(T)$ pro $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$
- $\sigma(T) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon(T)$
- Spektrální stabilita
$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\| < \varepsilon} \sigma(T + V)$$
- Pseudomódy: $\lambda \in \sigma_\varepsilon(T) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$ nebo $\exists \psi \in \mathrm{Dom}(T)$ tak, že
$$\|(T - \lambda)\psi\| < \varepsilon\|\psi\|$$
- $\sigma_\varepsilon(T) \neq \varnothing$ pro všechna $\varepsilon > 0$
- Každá omezená komponenta $\sigma_\varepsilon(T)$ má neprázdný průnik s $\sigma(T)$

Spektrální stabilita - příklady

Legendrova diferenční matice 12×12

$\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, \ldots, 10^{-7}$ (od vnější po vnitřní)

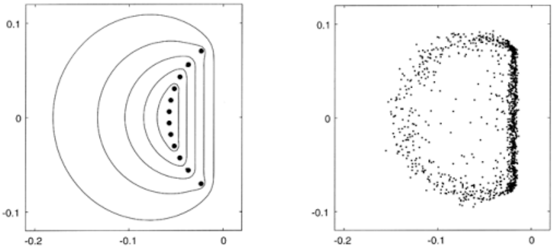


Spektrální stabilita - příklady

Legendrova diferenční matice 12×12

$\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, \ldots, 10^{-7}$ (od vnější po vnitřní)

Vlastní hodnoty 100 náhodných matic $\mathbb{A} + \mathbb{V}$, kde $\|\mathbb{V}\| = 10^{-3}$

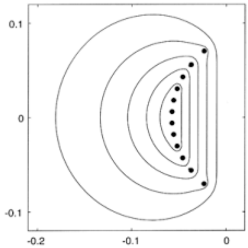


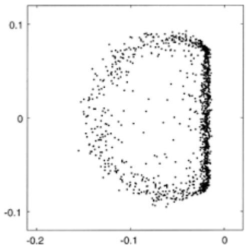
Spektrální stabilita - příklady

Legendrova diferenční matice 12×12

$\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, \ldots, 10^{-7}$ (od vnější po vnitřní)

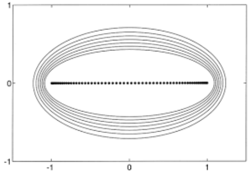
Vlastní hodnoty 100 náhodných matic $\mathbb{A} + \mathbb{V}$, kde $\|\mathbb{V}\| = 10^{-3}$





Tridiagonální Toeplitzova matice 64×64

$\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-8}$ (od vnější po vnitřní)

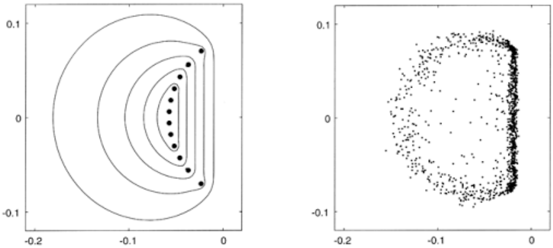


Spektrální stabilita - příklady

Legendrova diferenční matice 12×12

$\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, \ldots, 10^{-7}$ (od vnější po vnitřní)

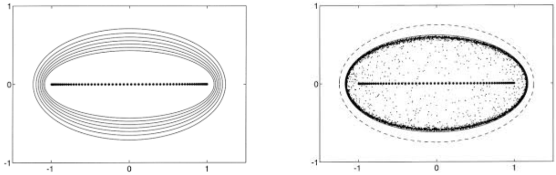
Vlastní hodnoty 100 náhodných matic $\mathbb{A} + \mathbb{V}$, kde $\|\mathbb{V}\| = 10^{-3}$



Tridiagonální Toeplitzova matice 64×64

$\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-8}$ (od vnější po vnitřní)

Vlastní hodnoty 100 náhodných matic $\mathbb{A} + \mathbb{V}$, kde $\|\mathbb{V}\| = 10^{-2}$



Ekvivalentní definice

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\| (T-\lambda)^{-1} \right\| > \varepsilon^{-1} \right\} \tag{1}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{2}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon\} \tag{3}$$

Důkaz (pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$):

Ekvivalentní definice

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| > \varepsilon^{-1}\right\} \tag{1}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{2}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon\} \tag{3}$$

Důkaz (pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$):

$\lambda \in \sigma(\mathbb{A})$ – triviální

$\lambda \notin \sigma(\mathbb{A}) \Rightarrow$ existuje $(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}$

(2) $\Rightarrow$ (3):

- platí $(\mathbb{A}+\mathbb{V})\vec{x} = \lambda\vec{x}$
- $\mathbb{V} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\|\mathbb{V}\| < \varepsilon$ a $\vec{x} \in \mathbb{C}^N, \|\vec{x}\| = 1$

$\Rightarrow$ $\|(A-\lambda)\vec{x}\| = \|\mathbb{V}\vec{x}\| \leq \|\mathbb{V}\|\|\vec{x}\| < \varepsilon$

Ekvivalentní definice

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| > \varepsilon^{-1} \right\} \tag{1}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{2}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon\} \tag{3}$$

Důkaz (pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$):

(3) $\Rightarrow$ (1):

- $(\mathbb{A}-\lambda)\vec{x} = s\vec{y}$, kde $\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\| = 1$, $0 < s < \varepsilon$
- $(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\vec{y} = s^{-1}\vec{x}$
- $\|(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\| = \sup\limits_{\vec{y}\in\mathbb{C}^N, \|\vec{y}\|=1} \|(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\vec{y}\| \geq s^{-1} > \varepsilon^{-1}$

Ekvivalentní definice

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| > \varepsilon^{-1} \right\} \tag{1}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{2}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon\} \tag{3}$$

Důkaz (pro $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{N\times N}$):

(1) $\Rightarrow$ (2):

- $\|(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\| = \sup\limits_{\vec{y}\in\mathbb{C}^N, \|\vec{y}\|=1} \|(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\vec{y}\| > \varepsilon^{-1}$
- $(\mathbb{A}-\lambda)^{-1}\vec{y} = s^{-1}\vec{x}$, kde $\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\| = 1$, $0 < s < \varepsilon$
- $(\mathbb{A}-\lambda)\vec{x} = s\vec{y}$
- ? chceme najít $\mathbb{V} \in \mathbb{C}^{N\times N}$ tak, aby $\|\mathbb{V}\| = s$ a $\mathbb{V}\vec{x} = s\vec{y}$
- ? pak $(\mathbb{A}+\mathbb{V})\vec{x} = \lambda\vec{x}$
- můžeme volit $\mathbb{V} := s\vec{y}\vec{x}^*$
- $\mathbb{V}\vec{x} = s\vec{y}\vec{x}^*\vec{x} = s\vec{y}$

Důkaz pro operátory

Lemma

Nechť $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ *a* $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *a* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|V\| < 1/\|T^{-1}\|$. *Pak* $(T+V)^{-1}$ *existuje a platí*

$$\|(T+V)^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|V\|\|T^{-1}\|}.$$

Naopak, pro každé $\mu > 1/\|T^{-1}\|$ *existuje* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|V\| < \mu$ *takové, že* $(T+V)\psi = 0$ *pro nějaké nenulové* $\psi \in \mathscr{H}$.

Důkaz.

□

Důkaz pro operátory

Lemma

Nechť $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ *a* $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *a* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\| V \| < 1/\| T^{-1} \|$.
Pak $(T + V)^{-1}$ *existuje a platí*

$$\|(T + V)^{-1}\| \leq \frac{\| T^{-1} \|}{1 - \| V \| \| T^{-1} \|}.$$

Naopak, pro každé $\mu > 1/\| T^{-1} \|$ *existuje* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\| V \| < \mu$ *takové, že* $(T + V)\psi = 0$ *pro nějaké nenulové* $\psi \in \mathscr{H}$.

Důkaz.

První část:

- $(T + V)^{-1} = \big((I + VT^{-1})T\big)^{-1} = T^{-1}(I + VT^{-1})^{-1}$
- $\| VT^{-1} \| < 1 \quad \Rightarrow \quad (I + VT^{-1})^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} (-VT^{-1})^j$
- $\|(T + V)^{-1}\| \leq \| T^{-1} \| \sum_{j=0}^{+\infty} \| - VT^{-1} \|^j \leq \frac{\| T^{-1} \|}{1 - \| V \| \| T^{-1} \|}$

$\square$

Důkaz pro operátory

Lemma

Nechť $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ *a* $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *a* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|V\| < 1/\|T^{-1}\|$.
Pak $(T+V)^{-1}$ *existuje a platí*

$$\|(T+V)^{-1}\| \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|V\|\|T^{-1}\|}.$$

Naopak, pro každé $\mu > 1/\|T^{-1}\|$ *existuje* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|V\| < \mu$ *takové, že* $(T+V)\psi = 0$ *pro nějaké nenulové* $\psi \in \mathscr{H}$.

Důkaz.

Druhá část:

- $\|T^{-1}\| = \sup\limits_{\vec{\psi} \in \mathbb{C}^N, \|\vec{\psi}\|=1} \|(T-\lambda)^{-1}\vec{\psi}\| > \mu^{-1}$
- existuje $\psi \in \mathscr{H}, \|\psi\| = 1$ tak, že $\phi = T\psi$ splňuje $\|\phi\| < \mu$
- definujeme operátor V: $\psi \mapsto -\phi$, $\|V\| < \mu$ (Hahn-Banachův teorém)
- $(T+V)\psi = \phi - \phi = 0$

$\square$

Důkaz pro operátory

Lemma

Nechť $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ *a* $(T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *a* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|V\| < 1/\|(T - \lambda)^{-1}\|$. *Pak* $(T + V - \lambda)^{-1}$ *existuje a platí*

$$\|(T + V - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{\|(T - \lambda)^{-1}\|}{1 - \|V\|\|(T - \lambda)^{-1}\|}.$$

Naopak, pro každé $\mu > 1/\|(T - \lambda)^{-1}\|$ *existuje* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, $\|V\| < \mu$ *takové, že* $(T + V - \lambda)\psi = 0$ *pro nějaké nenulové* $\psi \in \mathscr{H}$.

Důkaz pro operátory

Lemma

Nechť $T \in \mathscr{C}(\mathscr{H})$ *a* $(T - \lambda)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *a* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$,
$\|V\| < 1/\|(T - \lambda)^{-1}\|$. *Pak* $(T + V - \lambda)^{-1}$ *existuje a platí*

$$\|(T + V - \lambda)^{-1}\| \leq \frac{\|(T - \lambda)^{-1}\|}{1 - \|V\|\|(T - \lambda)^{-1}\|}.$$

Naopak, pro každé $\mu > 1/\|(T - \lambda)^{-1}\|$ *existuje* $V \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$,
$\|V\| < \mu$ *takové, že* $(T + V - \lambda)\psi = 0$ *pro nějaké nenulové* $\psi \in \mathscr{H}$.

Důsledky:

- $\|(T - \lambda)^{-1}\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))}$
- $\lambda \notin \sigma(T)$ pak $\lambda \notin \sigma(T + V)$ pro žádné V, $\|V\| \leq \frac{1}{\|(T-\lambda)^{-1}\|}$
- pro $\mu > \|(T - \lambda)^{-1}\|^{-1}$ existuje V, $\|V\| < \mu$ tak, že
  $(T + V)\psi = \lambda\psi$, $\|\psi\| = 1$

$\square$

Důkaz pro operátory

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left\| (T-\lambda)^{-1} \right\| > \varepsilon^{-1} \right\} \tag{4}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{5}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon \} \tag{6}$$

Důkaz pro operátory

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\| (T-\lambda)^{-1} \right\| > \varepsilon^{-1} \right\} \tag{4}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{5}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon\} \tag{6}$$

$\lambda \in \sigma(T)$ – triviální

$\lambda \notin \sigma(T) \Rightarrow$ existuje $(T-\lambda)^{-1}$

Důkaz pro operátory

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\| (T-\lambda)^{-1} \right\| > \varepsilon^{-1} \right\} \tag{4}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{5}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \operatorname{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon \} \tag{6}$$

(5) $\Rightarrow$ (6):

- $(T+V)\psi = \lambda\psi$, $\|V\| < \varepsilon$, $\psi \in \operatorname{Dom}(T)$, $\|\psi\| = 1$
- $\|(T-\lambda)\psi\| = \|V\psi\| < \varepsilon$

Důkaz pro operátory

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| > \varepsilon^{-1}\right\} \tag{4}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{5}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon\} \tag{6}$$

(5) $\Rightarrow$ (6):

- $(T+V)\psi = \lambda\psi$, $\|V\| < \varepsilon$, $\psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1$
- $\|(T-\lambda)\psi\| = \|V\psi\| < \varepsilon$

(6) $\Rightarrow$ (4):

- $(T-\lambda)\psi = s^{-1}\phi$, $\|\psi\|, \|\phi\| = 1$, $s < \varepsilon$
- $\|(T-\lambda)^{-1}\| \geq \|(T-\lambda)^{-1}\phi\| = s^{-1} > \varepsilon^{-1}$

Důkaz pro operátory

$$\sigma_\varepsilon(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| > \varepsilon^{-1}\right\} \tag{4}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \bigcup_{\|V\|<\varepsilon} \sigma(T+V) \tag{5}$$

$$\sigma_\varepsilon(T) = \sigma(T) \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists \psi \in \mathrm{Dom}(T), \|\psi\| = 1, \|(T-\lambda)\psi\| < \varepsilon\} \tag{6}$$

(5) ⇒ (6):

- $(T+V)\psi = \lambda\psi$, $\|V\| < \varepsilon$, $\psi \in \mathrm{Dom}(T)$, $\|\psi\| = 1$
- $\|(T-\lambda)\psi\| = \|V\psi\| < \varepsilon$

(6) ⇒ (4):

- $(T-\lambda)\psi = s^{-1}\phi$, $\|\psi\|, \|\phi\| = 1$, $s < \varepsilon$
- $\|(T-\lambda)^{-1}\| \geq \|(T-\lambda)^{-1}\phi\| = s^{-1} > \varepsilon^{-1}$

(4) ⇒ (5):

- $\varepsilon > 1/\|(T-\lambda)^{-1}\|$

⇒ Lemma – existence operátoru V

Děkuji za pozornost!

http://gemma.ujf.cas.cz/~r.novak