Princip minimaxu a aplikace

Vojtěch Šmíd

FJFI ČVUT

Obsah

Minimax
DRY POWDER
FIRE EXTINGUISHER
OPERATING INSTRUCTIONS
SUITABLE FOR CLASSES OF FIRE
A
B
C
GUNNEBO

Vlastnosti hermitovských matic

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice, pak má následující vlastnosti:

- $\sigma(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ lze seřadit vlastní čísla $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$

Vlastnosti hermitovských matic

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice, pak má následující vlastnosti:

- $\sigma(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ lze seřadit vlastní čísla $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$
- vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou ortogonální

Vlastnosti hermitovských matic

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice, pak má následující vlastnosti:

- $\sigma(A) \subset \mathbb{R} \Rightarrow$ lze seřadit vlastní čísla $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$
- vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou ortogonální
- existuje ortonormální báze $\mathbb{C}^n$ složená z vlastních vektorů

Rayleigh

Věta (Rayleigh)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ *je hermitovská matice s vlastními čísly* $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$*. Nechť* $i_1, \cdots, i_k$ *jsou přirozená čísla, pro která platí* $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$*. Nechť dále* $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ *jsou ortonormální vektory, pro které platí* $Ax_{i_p} = \lambda_{i_p} x_{i_p}$ *pro každé* $p = 1, \cdots, k$ *a* $S = [x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}]_\lambda$*. Potom platí*

1. $\lambda_{i_1} = \min\limits_{\{x \in S | x \neq 0\}} \dfrac{x^* A x}{x^* x} = \min\limits_{\{x \in S | \|x\| = 1\}} x^* A x \leq \max\limits_{\{x \in S | \|x\| = 1\}} x^* A x = \max\limits_{\{x \in S | x \neq 0\}} \dfrac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_{i_k}$
2. $\lambda_{i_1} \leq x^* A x \leq \lambda_{i_k}$ *pro každý jednotkový vektor* $x \in S$ *s rovností na pravé resp. levé straně právě tehdy, když* $Ax = \lambda_{i_k} x$ *resp.* $Ax = \lambda_{i_1} x$

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$1 = x^* x$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{i_j}$

$$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q}$$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$$

$$x^* A x = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik})$$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$

$x^* A x = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik}) =$
$(\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 \lambda_{i_1} x_{i1} + \cdots + \alpha_k \lambda_{i_k} x_{ik})$

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$$1 = x^*x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p}\alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$$

$$x^*Ax = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^*(\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik}) =$$
$$(\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^*(\alpha_1 \lambda_{i_1} x_{i1} + \cdots + \alpha_k \lambda_{i_k} x_{ik}) = |\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k}$$

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$

$x^* A x = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik}) =$

$(\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 \lambda_{i_1} x_{i1} + \cdots + \alpha_k \lambda_{i_k} x_{ik}) = |\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k}$

$x^* A x$ je konvexní kombinace $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k} \Rightarrow \lambda_{i_1} \leq x^* A x \leq \lambda_{i_k}$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$1 = x^*x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p}\alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$

$x^*Ax = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^*(\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik}) =$

$(\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^*(\alpha_1 \lambda_{i_1} x_{i1} + \cdots + \alpha_k \lambda_{i_k} x_{ik}) = |\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k}$

x^*Ax je konvexní kombinace $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k} \Rightarrow \lambda_{i_1} \leq x^*Ax \leq \lambda_{i_k}$

$|\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k} = \lambda_{i_k}$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$

$x^* A x = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik}) =$

$(\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 \lambda_{i_1} x_{i1} + \cdots + \alpha_k \lambda_{i_k} x_{ik}) = |\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k}$

$x^* A x$ je konvexní kombinace $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k} \Rightarrow \lambda_{i_1} \leq x^* A x \leq \lambda_{i_k}$

$|\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k} = \lambda_{i_k} \Leftrightarrow \alpha_p = 0$ kdykoliv

$\lambda_{i_p} \neq \lambda_{i_k}$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$

$x^* A x = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik}) =$

$(\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 \lambda_{i_1} x_{i1} + \cdots + \alpha_k \lambda_{i_k} x_{ik}) = |\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k}$

$x^* A x$ je konvexní kombinace $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k} \Rightarrow \lambda_{i_1} \leq x^* A x \leq \lambda_{i_k}$

$|\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k} = \lambda_{i_k} \Leftrightarrow \alpha_p = 0$ kdykoliv

$\lambda_{i_p} \neq \lambda_{i_k} \Leftrightarrow x = \sum_{\{p | \lambda_{i_p} = \lambda_{i_k}\}} \alpha_P x_{i_p}$

Rayleigh

Důkaz.

Nechť x je jednotkový vektor z S, $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ij}$

$1 = x^* x = \sum_{p,q=1}^{k} \overline{\alpha_p} \alpha_q x_{i_p}^* x_{i_q} = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_k|^2$

$x^* A x = (\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 A x_{i1} + \cdots + \alpha_k A x_{ik}) =$

$(\alpha_1 x_{i1} + \cdots + \alpha_k x_{ik})^* (\alpha_1 \lambda_{i_1} x_{i1} + \cdots + \alpha_k \lambda_{i_k} x_{ik}) = |\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k}$

$x^* A x$ je konvexní kombinace $\lambda_{i_1}, \cdots, \lambda_{i_k} \Rightarrow \lambda_{i_1} \leq x^* A x \leq \lambda_{i_k}$

$|\alpha_1|^2 \lambda_{i_1} + \cdots + |\alpha_k|^2 \lambda_{i_k} = \lambda_{i_k} \Leftrightarrow \alpha_p = 0$ kdykoliv

$\lambda_{i_p} \neq \lambda_{i_k} \Leftrightarrow x = \sum_{\{p | \lambda_{i_p} = \lambda_{i_k}\}} \alpha_P x_{i_p} \Leftrightarrow x$ je vlastní vektor příslušný λ_{i_k}

$\square$

Princip minimaxu

Lemma (1)

Nechť $S_1, \cdots, S_k$ *jsou podprostory* $\mathbb{C}^n$*. Pokud* $\delta = \dim S_1 + \cdots + \dim S_k + (k-1)n \geq 1$*, pak existují ortonormální vektory* $x_1, \cdots, x_\delta$ *takové, že* $x_1, \cdots, x_\delta \in S_i$ *pro každé* $i = 1, \cdots, k$*, tedy* $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ *obsahuje alespoň jeden jednotkový vektor.*

Princip minimaxu

Lemma (1)

Nechť $S_1, \cdots, S_k$ *jsou podprostory* $\mathbb{C}^n$. *Pokud* $\delta = \dim S_1 + \cdots + \dim S_k + (k-1)n \geq 1$, *pak existují ortonormální vektory* $x_1, \cdots, x_\delta$ *takové, že* $x_1, \cdots, x_\delta \in S_i$ *pro každé* $i = 1, \cdots, k$, *tedy* $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ *obsahuje alespoň jeden jednotkový vektor.*

Důkaz.

$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2)$

Lemma (1)

Nechť $S_1, \cdots, S_k$ *jsou podprostory* $\mathbb{C}^n$. *Pokud* $\delta = \dim S_1 + \cdots + \dim S_k + (k-1)n \geq 1$, *pak existují ortonormální vektory* $x_1, \cdots, x_\delta$ *takové, že* $x_1, \cdots, x_\delta \in S_i$ *pro každé* $i = 1, \cdots, k$, *tedy* $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ *obsahuje alespoň jeden jednotkový vektor.*

Důkaz.

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - n = \delta \geq 1$$

Princip minimaxu

Lemma (1)

Nechť $S_1, \cdots, S_k$ *jsou podprostory* $\mathbb{C}^n$*. Pokud* $\delta = \dim S_1 + \cdots + \dim S_k + (k-1)n \geq 1$*, pak existují ortonormální vektory* $x_1, \cdots, x_\delta$ *takové, že* $x_1, \cdots, x_\delta \in S_i$ *pro každé* $i = 1, \cdots, k$*, tedy* $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ *obsahuje alespoň jeden jednotkový vektor.*

Důkaz.

$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - n = \delta \geq 1$
Matematickou indukcí:
$\dim(S_1 \cap \cdots \cap S_k) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_k - (k-1)n = \delta \geq 1$

Princip minimaxu

Lemma (1)

Nechť $S_1, \cdots, S_k$ *jsou podprostory* $\mathbb{C}^n$*. Pokud* $\delta = \dim S_1 + \cdots + \dim S_k + (k-1)n \geq 1$*, pak existují ortonormální vektory* $x_1, \cdots, x_\delta$ *takové, že* $x_1, \cdots, x_\delta \in S_i$ *pro každé* $i = 1, \cdots, k$*, tedy* $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ *obsahuje alespoň jeden jednotkový vektor.*

Důkaz.

$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - n = \delta \geq 1$
Matematickou indukcí:
$\dim(S_1 \cap \cdots \cap S_k) = \dim S_1 + \cdots + \dim S_k - (k-1)n = \delta \geq 1$
Za vektory $x_1, \cdots, x_\delta$ lze zvolit libovolných δ členů ortonormální báze $S_1 \cap \cdots \cap S_k$ $\square$

Lemma (2)

Nechť f je omezená reálná funkce na množině S. Nechť dále S_1 a S_2 jsou množiny takové, že $S_1 \neq \emptyset$ a $S_1 \subset S_2 \subset S$. Potom
$\max\limits_{x \in S_2} f(x) \geq \max\limits_{x \in S_1} f(x) \geq \min\limits_{x \in S_1} f(x) \geq \min\limits_{x \in S_2} f(x)$.

Lemma (3)

Necht $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice s vlastními čísly $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$. Potom vlastní čísla matice $-A$ jsou seřazena $-\lambda_n(A) \leq \cdots \leq -\lambda_1(A)$ neboli $\lambda_k(-A) = -\lambda_{n-k+1}(A), k = 1, \cdots, n$.

Princip minimaxu

Věta (Courant-Fischer)

Nechť $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitovská matice s vlastními čísly $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Nechť dále $k = 1, \cdots, n$ a S značí podprostor $\mathbb{C}^n$. Potom

$$\lambda_k = \min_{\{S \mid \dim S = k\}} \max_{\{x \in S \mid x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

a

$$\lambda_k = \max_{\{S \mid \dim S = n-k+1\}} \min_{\{x \in S \mid x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.
$\dim S + \dim S' - n$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.
$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.
$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

$$\max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

$$\max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \max_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \min_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \min_{\{x \in S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x}$$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

$$\max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \max_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \min_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq$$
$$\min_{\{x \in S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

$$\max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \max_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \min_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \geq$$

$$\min_{\{x \in S' | x \neq 0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k$$

$$\min_{\{S | \dim S = k\}} \max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \lambda_k$$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

$$\max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \max_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \min_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq$$

$$\min_{\{x \in S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

$$\min_{\{S | \dim S = k\}} \max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_k$$

Zvolím $S = [x_1, \cdots, x_k]_\lambda$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

$$\max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \max_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \min_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq$$

$$\min_{\{x \in S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

$$\min_{\{S | \dim S = k\}} \max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_k$$

Zvolím $S = [x_1, \cdots, x_k]_\lambda$, $\dfrac{x_k^* A x_k}{x_k^* x_k} = \lambda_k$

Důkaz

Nechť vlastní vektory $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}^n$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{C}^n$, S je libovolný podprostor s dimenzí k, $S' = [x_k, \cdots, x_n]_\lambda$.

$\dim S + \dim S' - n = k + n - k + 1 - n = 1 \Rightarrow \exists x \in S \cap S', x \neq 0$

$$\max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \max_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \min_{\{x \in S \cap S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq$$

$$\min_{\{x \in S' | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$$

$$\min_{\{S | \dim S = k\}} \max_{\{x \in S | x \neq 0\}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_k$$

Zvolím $S = [x_1, \cdots, x_k]_\lambda$, $\dfrac{x_k^* A x_k}{x_k^* x_k} = \lambda_k \Rightarrow \min\limits_{\{S | \dim S = k\}} \max\limits_{\{x \in S | x \neq 0\}} \dfrac{x^* A x}{x^* x} = \lambda_k$

Princip minimaxu

Důkaz.

$$-\lambda_k = \min_{\{S|\dim S=n-k+1\}} \max_{\{x\in S|x\neq 0\}} \frac{x^*(-A)x}{x^*x}$$

$$= \min_{\{S|\dim S=n-k+1\}} \max_{\{x\in S|x\neq 0\}} (-\frac{x^*Ax}{x^*x})$$

$$= \min_{\{S|\dim S=n-k+1\}} (-\min_{\{x\in S|x\neq 0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x})$$

$$= -(\max_{\{S|\dim S=n-k+1\}} \min_{\{x\in S|x\neq 0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x})$$

□

Weyl

Věta (Weyl)

Nechť $A, B \in \mathbb{C}^n$ *jsou hermitovské matice,* $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ *vlastní čísla příslušná* A, $\{\nu_i\}_{i=1}^n$ *vlastní čísla příslušná* B *a* $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ *vlastní čísla příslušná* $A+B$. *Potom*

$$\lambda_i \leq \mu_{i+j} + \nu_{n-j},\ j = 0, 1, \cdots, n-i \text{ pro každé } i = 1, \cdots, n.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když pro pár i,j existuje nenulový vektor x *tak, že* $Ax = \mu_{i+j}x$, $Bx = \nu_{n-j}x$ *a* $(A+B)x = \lambda_i x$.

Dále také

$$\mu_{i-j+1} + \nu_j \geq \lambda_i,\ j = 1, \cdots, i \text{ pro každé } i = 1, \cdots, n.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když pro pár i, j existuje nenulový vektor x *tak, že* $Ax = \mu_{i-j+1}x$, $Bx = \nu_j x$ *a* $(A+B)x = \lambda_i x$.
Pokud A a B nemají žádná společná vlastní čísla, obě nerovnosti jsou ostré.

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A + B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A + B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A + B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A + B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$
Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n - j$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A + B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A + B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$
Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n - j$
$\dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - 2n$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A + B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A + B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$
Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n - j$
$\dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - 2n = i + j + n - j + n - i + 1 - 2n = 1$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A+B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A+B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$

Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n-j$

$\dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - 2n = i + j + n - j + n - i + 1 - 2n = 1$

$\lambda_i(A+B)$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A + B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A + B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$
Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n - j$
$\dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - 2n = i + j + n - j + n - i + 1 - 2n = 1$
$\lambda_i(A + B) \leq x^*(A + B)x = x^*Ax + x^*Bx$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A + B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A + B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$

Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n - j$

$\dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - 2n = i + j + n - j + n - i + 1 - 2n = 1$

$\lambda_i(A + B) \leq x^*(A + B)x = x^*Ax + x^*Bx \leq \mu_{i+j} + \nu_{n-j}$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A + B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A + B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$

Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n - j$

$\dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - 2n = i + j + n - j + n - i + 1 - 2n = 1$

$\lambda_i(A + B) \leq x^*(A + B)x = x^*Ax + x^*Bx \leq \mu_{i+j} + \nu_{n-j}$

$-\lambda_{n-i+1}(A + B) = \lambda_i(-A - B) \leq \mu_{i+j}(-A) + \nu_{n-j}(-B) = -\mu_{n-i-j+1}(A) - \nu_{j+1}(B)$

Weyl

Důkaz.

Nechť $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ a $z_1, \cdots, z_n$ jsou ortonormální vlastní vektory matic A, B a $A+B$ tak, že platí $Ax_i = \mu_i x_i, By_i = \nu_i y_i, (A+B)z_i = \lambda_i z_i$ pro $i = 1, \cdots, n$

Nechť $S_1 = [x_1, \cdots, x_{i+j}]_\lambda$, $S_2 = [y_1, \cdots, y_{n-j}]_\lambda$ a $S_3 = [z_i, \cdots, z_n]_\lambda$ pro dané $i = 1, \cdots, n$ a $j = 0, 1, \cdots, n-j$

$\dim S_1 + \dim S_2 + \dim S_3 - 2n = i + j + n - j + n - i + 1 - 2n = 1$

$\lambda_i(A+B) \leq x^*(A+B)x = x^*Ax + x^*Bx \leq \mu_{i+j} + \nu_{n-j}$

$-\lambda_{n-i+1}(A+B) = \lambda_i(-A-B) \leq \mu_{i+j}(-A) + \nu_{n-j}(-B) =$
$-\mu_{n-i-j+1}(A) - \nu_{j+1}(B)$

Po přeznačení $i' = n - i + 1$, $j' = j + 1$

$\lambda_{i'} \geq \mu_{'-j'+1} + \nu_{j'}$

Důsledek

Nechť $A, B \in \mathbb{C}^n$ jsou hermitovské matice, $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ vlastní čísla příslušná A a $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ vlastní čísla příslušná $A + B$. Nechť B má přesně π kladných a přesně ϱ záporných vlastních čísel. Potom

$$\lambda_i \leq \mu_{i+j},\ i = 1, \cdots, n - \pi.$$

Rovnost nastává pro nějaké i právě tehdy, když B je singulární a existuje nenulový vektor x takový, že $Ax = \mu_{i+\pi}x$, $Bx = 0$ a $(A + B)x = \lambda_i x$ Dále také

$$\mu_{i-\varrho} \leq \lambda_i,\ i = \varrho, \cdots, n.$$

Rovnost nastává pro nějaké i právě tehdy, když B je singulární a existuje nenulový vektor x takový, že $Ax = \mu_{i-\varrho}x$, $Bx = 0$ a $(A + B)x = \lambda_i x$.

Důkaz.

Položíme-li ve Weylově větě $j = \pi$, získáme

$$\lambda_i \leq \mu_{i+\pi} + \nu_{n-\pi}$$

Důkaz.

Položíme-li ve Weylově větě $j = \pi$, získáme

$$\lambda_i \leq \mu_{i+\pi} + \nu_{n-\pi} \leq \mu_{i+\pi}$$

$$\nu_{n-\pi} \leq 0$$

Rovnost nastává právě tehdy, když je B singulární.

Důkaz.

Položíme-li ve Weylově větě $j = \pi$, získáme

$$\lambda_i \leq \mu_{i+\pi} + \nu_{n-\pi} \leq \mu_{i+\pi}$$

$$\nu_{n-\pi} \leq 0$$

Rovnost nastává právě tehdy, když je B singulární.
Druhou nerovnost získáme dosazením $j = \varrho + 1$

$\square$

Princip monotonicity

Věta (Princip monotonicity)

$A, B \in \mathbb{C}^n$ jsou hermitovské matice, $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ vlastní čísla příslušná A a $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ vlastní čísla příslušná $A + B$ a B je pozitivně semidefinitní. Potom

$$\mu_i \leq \lambda_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

Rovnost nastává pro nějaké i právě tehdy, když B je singulární a existuje nenulový vektor x takový, že $Ax = \mu_i x$, $Bx = 0$ a $(A + B)x = \lambda_i x$. Pokud je B pozitivně definitní, potom

$$\mu_i < \lambda_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

Děkuji za pozornost

Horn, Roger A., and Charles R. Johnson. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge University Press, 2013.