Frenetův repér prostorových křivek a kdy to nefunguje

Kateřina Zahradová

FJFI ČVUT, UJF AVČR

Obsah

Úvod

- křivka: $c : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}^2$
  požadujeme regularitu: $\dot{c}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a_1, a_2]$
- délka oblouku: $s(t) = \int\limits_a^t |\dot{c}(u)| \mathrm{d}u$, $s : [a_1, a_2] \to [0, L]$
- parametrizace délkou oblouku $\gamma = c \circ s^{-1} \Rightarrow |\dot{\gamma}(s)| = 1$

Křivost

Křivost

Oskulační kružnice a její konstrukce:

- kružnice procházející $c(t_1), c(t_2), c(t_3)$

Křivost

Oskulační kružnice a její konstrukce:

- kružnice procházející $c(t_1), c(t_2), c(t_3)$
- existuje limitní kružnice pro $t_1, t_2, t_3 \to t$?

Křivost

Oskulační kružnice a její konstrukce:

- kružnice procházející $c(t_1), c(t_2), c(t_3)$
- existuje limitní kružnice pro $t_1, t_2, t_3 \to t$?
- pokud ano, tak kde má střed?

Nechť $t_1 < t_2 < t_3$

Definujeme $f(t) = \langle c(t) - S(t_1, t_2, t_3), c(t) - S(t_1, t_2, t_3) \rangle$

Nechť $t_1 < t_2 < t_3$

Definujeme $f(t) = \langle c(t) - S(t_1, t_2, t_3), c(t) - S(t_1, t_2, t_3) \rangle$

$\Rightarrow f(t_i) = R^2, \; i = 1, 2, 3$

Nechť $t_1 < t_2 < t_3$

Definujeme $f(t) = \langle c(t) - S(t_1, t_2, t_3), c(t) - S(t_1, t_2, t_3) \rangle$

$\Rightarrow f(t_i) = R^2$, $i = 1, 2, 3$

$\Rightarrow (\exists\, \xi_1, \xi_2)(\dot{f}(\xi_i) = 0)$, $\xi_i \in (t_i, t_{i+1})$

Nechť $t_1 < t_2 < t_3$

Definujeme $f(t) = \langle c(t) - S(t_1, t_2, t_3), c(t) - S(t_1, t_2, t_3)\rangle$

$\Rightarrow f(t_i) = R^2,\ i = 1, 2, 3$

$\Rightarrow (\exists\, \xi_1, \xi_2)(\dot{f}(\xi_i) = 0),\ \xi_i \in (t_i, t_{i+1})$

$\Rightarrow (\exists \eta)(\ddot{f}(\eta) = 0),\ \eta \in (\xi_1, \xi_2)$

Pro připomenutí $\gamma = c \circ s^{-1}$, $|\dot{\gamma}| = 1$

Věta

Nechť je dána křivka $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \in C^2$. Pokud $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$, potom pro body s_1, s_2, s_3 dostatečně blízko s platí, že $\gamma(s_i)$ neleží na přímce. Dále, pro $s_i \to s$ se kružnice skrz body $\gamma(s_i)$ blíží k limitní kružnici procházející bodem $\gamma(s)$. Pokud naopak $\ddot{\gamma}(s) = 0$, pak ani pokud body $\gamma(s_i)$ neleží na přímce, tak neexistuje limitní kružnice.

Pro připomenutí $\gamma = c \circ s^{-1}$, $|\dot{\gamma}| = 1$

Věta

Nechť je dána křivka $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma \in C^2$. Pokud $\ddot{\gamma}(s) \neq 0$, potom pro body s_1, s_2, s_3 dostatečně blízko s platí, že $\gamma(s_i)$ neleží na přímce. Dále, pro $s_i \to s$ se kružnice skrz body $\gamma(s_i)$ blíží k limitní kružnici procházející bodem $\gamma(s)$. Pokud naopak $\ddot{\gamma}(s) = 0$, pak ani pokud body $\gamma(s_i)$ neleží na přímce, tak neexistuje limitní kružnice.

Poloměr limitní kružnice je $\frac{1}{|\ddot{\gamma}(s)|}$, střed leží na normále ke křivce γ v bodě s.

Tečna a normála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Tečna a normála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Normála: $\vec{n}(s) = (-t_2(s), t_1(s))$

Tečna a normála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Normála: $\vec{n}(s) = (-t_2(s), t_1(s))$

Křivost: $\dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$, kde $\kappa = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$

Platí: $|\kappa| = |\ddot{\gamma}|$

Tečna a normála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Normála: $\vec{n}(s) = (-t_2(s), t_1(s))$

Křivost: $\dot{\vec{t}}(s) = \kappa(s)\vec{n}(s)$, kde $\kappa = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$

Platí: $|\kappa| = |\ddot{\gamma}|$

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{pmatrix}^{\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \end{pmatrix}$$

Křivost pro jinak parametrizované křivky

Vyjdeme z

$$|\kappa| = |\ddot{\gamma}|, \quad c = \gamma \circ s, \quad \kappa = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}).$$

Křivost pro jinak parametrizované křivky

Vyjdeme z

$$|\kappa| = |\ddot{\gamma}|, \quad c = \gamma \circ s, \quad \kappa = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}).$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\dot{c}_1 \ddot{c}_2 - \ddot{c}_1 \dot{c}_2}{(\dot{c}_1{}^2 + \dot{c}_2{}^2)^{3/2}}}$$

Prostorové křivky

Křivka: $c{:}[a_1, a_2] \to \mathbb{R}^3$, $c \in C^3$

Křivost:

- existuje limitní kružnice jako u rovinných?
- pokud ano, pak zase splňuje následující rovnice

$$\begin{aligned} \langle \dot{c}(t), c(t) - S \rangle &= 0 \\ \langle \ddot{c}(t), c(t) - S \rangle &= -\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \end{aligned}$$

Věta

Nechť γ:$[0, L] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma \in C^2, \ddot{\gamma} \neq 0$. *Potom pro* s_1, s_2, s_3 *dostatečně blízko* s *neleží* $\gamma(s_i)$ *na přímce. Pro* $s_i \to s$ *existuje limitní rovina* P *skrz* $\gamma(s)$.

Věta

Nechť $\gamma:[0, L] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma \in C^2, \ddot{\gamma} \neq 0$. *Potom pro* s_1, s_2, s_3 *dostatečně blízko* s *neleží* $\gamma(s_i)$ *na přímce. Pro* $s_i \to s$ *existuje limitní rovina* P *skrz* $\gamma(s)$.

Oskulační rovina P je určena $\dot{\gamma}(s)$ a $\ddot{\gamma}(s)$.

Křivost, normála a binormála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Křivost: $\kappa(s) = |\dot{\vec{t}}(s)| = |\ddot{\gamma}(s)|$

Křivost, normála a binormála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Křivost: $\kappa(s) = |\dot{\vec{t}}(s)| = |\ddot{\gamma}(s)|$

Hlavní normála: $\vec{n}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{\kappa(s)}$ pro $\kappa(s) \neq 0$

Křivost, normála a binormála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Křivost: $\kappa(s) = |\dot{\vec{t}}(s)| = |\ddot{\gamma}(s)|$

Hlavní normála: $\vec{n}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{\kappa(s)}$ pro $\kappa(s) \neq 0$

Binormála: $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$

Křivost, normála a binormála

Tečna: $\vec{t}(s) = \dot{\gamma}(s)$

Křivost: $\kappa(s) = |\dot{\vec{t}}(s)| = |\ddot{\gamma}(s)|$

Hlavní normála: $\vec{n}(s) = \frac{\dot{\vec{t}}(s)}{\kappa(s)}$ pro $\kappa(s) \neq 0$

Binormála: $\vec{b}(s) = \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ je pozitivně orientovaná ON báze

Torze

Vyjdeme z vlastností $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$:

$$\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle = 0$$

Torze

Vyjdeme z vlastností $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$:

$$\begin{aligned}\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle &= 1 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle = 0 \\ \langle \vec{b}, \vec{t} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle = -\langle \vec{b}, \dot{\vec{t}} \rangle = -\kappa \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 0\end{aligned}$$

Torze

Vyjdeme z vlastností $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$:

$$\begin{aligned}\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle &= 1 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{b} \rangle = 0 \\ \langle \vec{b}, \vec{t} \rangle &= 0 \Rightarrow \langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \rangle = -\langle \vec{b}, \dot{\vec{t}} \rangle = -\kappa \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 0\end{aligned}$$

Proto $\dot{\vec{b}} = -\tau \vec{n}$

Torze

Ale jaký význam má τ?

Torze

Ale jaký význam má τ?

- hodnota: délka $\vec{b}$ na $\gamma = \int_0^L |\dot{\vec{b}}(s)| \mathrm{d}s = \int_0^L |\tau(s)| \mathrm{d}s$

Torze

Ale jaký význam má τ?

- hodnota: délka $\vec{b}$ na $\gamma = \int_0^L |\dot{\vec{b}}(s)| \mathrm{d}s = \int_0^L |\tau(s)| \mathrm{d}s$
- znaménko: $\tau = \frac{1}{\kappa^2} \langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma} \rangle$

Torze

Ale jaký význam má τ?

- hodnota: délka $\vec{b}$ na $\gamma = \int_0^L |\dot{\vec{b}}(s)| \mathrm{d}s = \int_0^L |\tau(s)| \mathrm{d}s$
- znaménko: $\tau = \frac{1}{\kappa^2} \langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, \dddot{\gamma} \rangle$

  tedy $\tau > 0 \Leftrightarrow \vec{t}, \vec{n}, \dddot{\gamma}$ jsou pravotočivá báze $\mathbb{R}^3$

Taylorův rozvoj

$$c(t+h) = c(t) + h\dot{c}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{c}(t) + \frac{h^3}{6}\dddot{c}(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

Taylorův rozvoj

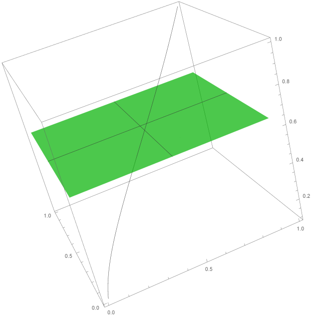
$$c(t+h) - \left[c(t) + h\dot{c}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{c}(t)\right] = \frac{h^3}{6}\dddot{c}(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

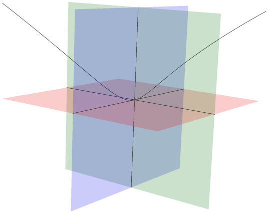
A tedy pro $\dddot{c}(t) \neq 0$ křivka protíná P v bodě t.

Taylorův rozvoj

$$c(t+h) - [c(t) + h\dot{c}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{c}(t)] = \frac{h^3}{6}\dddot{c}(t) + \mathcal{O}(h^3)$$

A tedy pro $\dddot{c}(t) \neq 0$ křivka protíná P v bodě t.





Libovolná parametrizace

Pro křivky s libovolnou parametrizací:

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \frac{|\dot{c} \times \ddot{c}|}{|\dot{c}|^3} \\
\tau &= \frac{\langle \dot{c} \times \ddot{c}, \dddot{c} \rangle}{\langle \dot{c} \times \ddot{c}, \dot{c} \times \ddot{c} \rangle}
\end{aligned}
$$

Frenetovy formulky

Co už máme:

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n} \\
\dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n}
\end{aligned}
$$

Frenetovy formulky

Co už máme:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n} \end{aligned}$$

Chybí nám tedy $\dot{\vec{n}}$:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

Frenetovy formulky

Co už máme:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n} \end{aligned}$$

Chybí nám tedy $\dot{\vec{n}}$:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{b} \times \vec{t} \\ \dot{\vec{n}} &= \dot{\vec{b}} \times \vec{t} + \vec{b} \times \dot{\vec{t}} \end{aligned}$$

Frenetovy formulky

Co už máme:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n} \\ \dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n} \end{aligned}$$

Chybí nám tedy $\dot{\vec{n}}$:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{b} \times \vec{t} \\ \dot{\vec{n}} &= \dot{\vec{b}} \times \vec{t} + \vec{b} \times \dot{\vec{t}} \\ &= -\tau \vec{n} \times \vec{t} + \vec{b} \times (\kappa \vec{n}) \end{aligned}$$

Frenetovy formulky

Co už máme:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{t}} &= \kappa \vec{n}\\ \dot{\vec{b}} &= -\tau \vec{n}\end{aligned}$$

Chybí nám tedy $\dot{\vec{n}}$:

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \vec{b} \times \vec{t}\\ \dot{\vec{n}} &= \dot{\vec{b}} \times \vec{t} + \vec{b} \times \dot{\vec{t}}\\ &= -\tau \vec{n} \times \vec{t} + \vec{b} \times (\kappa \vec{n})\\ &= -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}\end{aligned}$$

Frenetovy formulky

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}^{\bullet} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

Kdy to funguje

Helix Torus Viviani

Projekce do rovin

Oskulační rovina: $(\vec{t}, \vec{n})$

Normálová rovina: $(\vec{n}, \vec{b})$

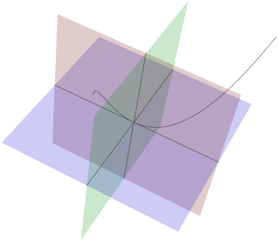
Rektifikační rovina: $(\vec{t}, \vec{b})$

Projekce do rovin

Oskulační rovina: $(\vec{t}, \vec{n})$

Normálová rovina: $(\vec{n}, \vec{b})$

Rektifikační rovina: $(\vec{t}, \vec{b})$

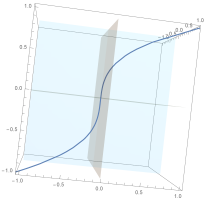
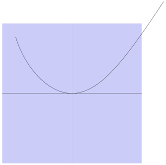
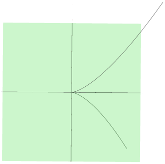
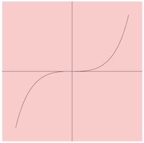


Projekce do rovin

Uvažujme křivku $c(t) = (t, t^2, t^3)$

Projekce do rovin

Uvažujme křivku $c(t) = (t, t^2, t^3)$

Kdy to nefunguje

Z definice $\vec{n}, \vec{b}$: $\kappa \neq 0$, z definice τ: musí existovat $\vec{n}'$

Kdy to nefunguje

Z definice $\vec{n}, \vec{b}$: $\kappa \neq 0$, z definice τ: musí existovat $\vec{n}$

Proto jsme uvažovali pouze křivky, pro které platí:

$$\dot{c} \neq 0$$

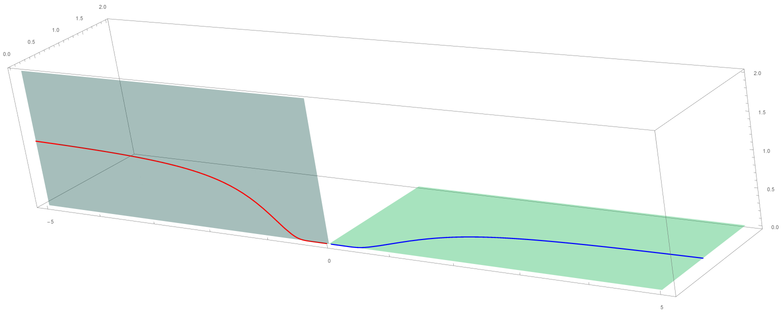
$$\boxed{\ddot{c} \neq 0}$$

Dále je nutné, aby $\dot{c}(t), \ddot{c}(t)$ byly LN.

Křivka s $\ddot{c} = 0$

Křivka

$$c(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ (t, 0, e^{-1/t^2}) & t < 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & t > 0 \end{cases}$$



Křivka s $\ddot{c} = 0$

Ale i pro křivky s $\ddot{c} = 0$ může existovat oskulační rovina.

$$\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{c}, \dddot{c} \rangle + \langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle = 0$$

Křivka s $\ddot{c} = 0$

Ale i pro křivky s $\ddot{c} = 0$ může existovat oskulační rovina.

$$\langle \dot{c}, \ddot{c} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \dot{c}, \dddot{c} \rangle + \langle \ddot{c}, \ddot{c} \rangle = 0$$

Oskulační rovina P je v tom případě tvořena $\dot{c}$ a první nenulovou derivací c.
Pozor! V tomto případě je nutno volit body t_i pouze na jedné straně od bodu t.

Závěr

- Existence Frenetova repéru
- Jednoznačnost křivky

Zdroje

Děkuji za pozornost!

- SPIVAK, Michael. A comprehensive introduction to differential geometry. 3rd ed. with corrections,Publish or Perish, 2005
- KLINGENBERG, Wilhelm. A course in differential geometry, Springer-Verlag, 1978
- HLAVATÝ, Ladislav. Úvod do geometrie křivek a ploch, 2010