České
vysoké
učení technické
v Praze

F4 Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská
Katedra fyziky

Konstrukce realizací Lieových algeber

Daniel Gromada

Realizace Lieovy algebry

- **Realizace** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na varietě M je homomorfismus $R\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}\, M$
- Př.: Algebru $\mathfrak{g}_2$ $[e_1, e_2] = e_1$ realizují vektorová pole v rovině

$$R(e_1) = \partial_1, \quad R(e_2) = x_1\partial_1 + \partial_2.$$

Realizace Lieovy algebry

- **Realizace** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na varietě M je homomorfismus $R\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect} M$
- Př.: Algebru $\mathfrak{g}_2$ $[e_1, e_2] = e_1$ realizují vektorová pole v rovině

$$R(e_1) = \partial_1, \quad R(e_2) = x_1\partial_1 + \partial_2.$$

- Prostá realizace se nazývá **věrná**

Realizace Lieovy algebry

- **Realizace** Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ na varietě M je homomorfismus $R\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}\, M$
- Př.: Algebru $\mathfrak{g}_2$ $[e_1, e_2] = e_1$ realizují vektorová pole v rovině

$$R(e_1) = \partial_1, \quad R(e_2) = x_1\partial_1 + \partial_2.$$

- Prostá realizace se nazývá **věrná**
- Budeme uvažovat **lokální** realizace, tj. $M := U$ okolí nuly v $\mathbb{R}^m$

Klasifikační úloha

- Realizace $R_1\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}\, M_1$ a $R_2\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}\, M_2$ jsou A-**ekvivalentní**, pro $A \subset\subset \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$, existuje-li $\alpha \in A$ a $\Phi\colon M_1 \to M_2$ difeomorfismus tak, že

$$R_2(\alpha(a)) = \Phi_* R_1(a) \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

Rozlišujeme dva speciální případy

$A = \{\mathrm{id}\}$ **silná** ekvivalence,

$A = \mathrm{Aut}\, \mathfrak{g}$ **slabá** ekvivalence.

Klasifikační úloha

- Realizace $R_1\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect} M_1$ a $R_2\colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect} M_2$ jsou A-**ekvivalentní**, pro $A \subset\subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, existuje-li $\alpha \in A$ a $\Phi\colon M_1 \to M_2$ difeomorfismus tak, že

$$R_2(\alpha(a)) = \Phi_* R_1(a) \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

  Rozlišujeme dva speciální případy

$$A = \{\mathrm{id}\} \qquad \textbf{silná}\ \text{ekvivalence},$$

$$A = \operatorname{Aut}\mathfrak{g} \qquad \textbf{slabá}\ \text{ekvivalence}.$$

- Najití všech realizací přímou cestou vyžaduje řešení komplikovaných parciálních diferenciálních rovnic
- Byly klasifikovány realizace všech Lieových algeber do dimenze čtyři*

* Popovych, Boyko, Nesterenko, Lutfullin, *J. Phys. A: Math. Gen.* 2003

Klasifikační úloha

- Realizace $R_1 \colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect} M_1$ a $R_2 \colon \mathfrak{g} \to \operatorname{Vect} M_2$ jsou A-**ekvivalentní**, pro $A \subset\subset \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$, existuje-li $\alpha \in A$ a $\Phi \colon M_1 \to M_2$ difeomorfismus tak, že

$$R_2(\alpha(a)) = \Phi_* R_1(a) \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

  Rozlišujeme dva speciální případy

$$A = \{\mathrm{id}\} \qquad \textbf{silná ekvivalence},$$

$$A = \operatorname{Aut} \mathfrak{g} \qquad \textbf{slabá ekvivalence}.$$

- Najití všech realizací přímou cestou vyžaduje řešení komplikovaných parciálních diferenciálních rovnic
- Byly klasifikovány realizace všech Lieových algeber do dimenze čtyři*
- Realizace $R \colon \mathfrak{g} \to U$, kde U je okolí nuly v $\mathbb{R}^m$ je **tranzitivní**, je-li $\{R(a)_0 \mid a \in \mathfrak{g}\} = T_0 M$.

* Popovych, Boyko, Nesterenko, Lutfullin, *J. Phys. A: Math. Gen.* 2003

Realizace a akce

- Pro Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje až na izomorfismus jedinečná lokální Lieova grupa G
- Pravá akce Lieovy grupy G na varietě M určuje na M realizaci $\mathfrak{g}$ pomocí **fundamentálních vektorových polí**

$$a \mapsto \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p \cdot \mathrm{e}^{ta} \right|_{t=0}$$

- Libovolnou realizaci lze naopak zintegrovat v akci lokální grupy

Realizace a akce

- „Stejné“ akce odpovídají „stejným“ realizacím

Realizace a akce

- „Stejné“ akce odpovídají „stejným“ realizacím
- Akce $\pi^{(1)}$ a $\pi^{(2)}$ grup G_1 a G_2 na M_1 a M_2 nazveme **podobné**, existuje-li difeomorfismus $\Phi\colon M_1 \to M_2$ a izomorfismus $\phi\colon G_1 \to G_2$ splňující

$$\Phi(\pi^{(1)}(p,g)) = \pi^{(2)}(\Phi(p), \phi(g)).$$

Realizace a akce

- „Stejné“ akce odpovídají „stejným“ realizacím
- Akce $\pi^{(1)}$ a $\pi^{(2)}$ grup G_1 a G_2 na M_1 a M_2 nazveme A-**podobné**, $A \subset\subset \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, existuje-li difeomorfismus $\Phi\colon M_1 \to M_2$ a izomorfismus $\phi\colon G_1 \to G_2$, $\mathrm{d}\phi \in A$ splňující

$$\Phi(\pi^{(1)}(p, g)) = \pi^{(2)}(\Phi(p), \phi(g)).$$

Realizace a akce

- „Stejné“ akce odpovídají „stejným“ realizacím
- Akce $\pi^{(1)}$ a $\pi^{(2)}$ grup G_1 a G_2 na M_1 a M_2 nazveme A-**podobné**, $A \subset\subset \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, existuje-li difeomorfismus $\Phi\colon M_1 \to M_2$ a izomorfismus $\phi\colon G_1 \to G_2$, d$\phi \in A$ splňující

$$\Phi(\pi^{(1)}(p, g)) = \pi^{(2)}(\Phi(p), \phi(g)).$$

- Realizace jsou A-ekvivalentní, právě když jsou příslušné akce A-podobné

Realizace a akce

- „Stejné“ akce odpovídají „stejným“ realizacím
- Akce $\pi^{(1)}$ a $\pi^{(2)}$ grup G_1 a G_2 na M_1 a M_2 nazveme A-**podobné**, $A \subset\subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, existuje-li difeomorfismus $\Phi\colon M_1 \to M_2$ a izomorfismus $\phi\colon G_1 \to G_2$, d$\phi \in A$ splňující
$$\Phi(\pi^{(1)}(p,g)) = \pi^{(2)}(\Phi(p), \phi(g)).$$
- Realizace jsou A-ekvivalentní, právě když jsou příslušné akce A-podobné
- Realizace je věrná, právě když je příslušná akce efektivní

Tranzitivní realizace

- Realizace je tranzitivní, právě když je příslušná akce tranzitivní

Tranzitivní realizace

- Realizace je tranzitivní, právě když je příslušná akce tranzitivní
- Každá tranzitivní akce G na M je izomorfní pravému násobení G na $G_p \setminus G = \{G_p g \mid g \in G\}$
- Tranzitivní akce G jsou tedy až na izomorfismus určeny podgrupou $H \subset\subset G$ hrající roli stabilizátoru

Tranzitivní realizace

- Realizace je tranzitivní, právě když je příslušná akce tranzitivní
- Každá tranzitivní akce G na M je izomorfní pravému násobení G na $G_p \setminus G = \{G_p g \mid g \in G\}$
- Tranzitivní akce G jsou tedy až na izomorfismus určeny podgrupou $H \subset\subset G$ hrající roli stabilizátoru
- Tranzitivní realizace $\mathfrak{g}$ jsou tedy určeny podalgebrou $\mathfrak{h} \subset\subset \mathfrak{g}$
- Tranzitivní realizace příslušné A-konjugovaným podalgebrám jsou A-ekvivalentní

Tranzitivní realizace

- Realizace je tranzitivní, právě když je příslušná akce tranzitivní
- Každá tranzitivní akce G na M je izomorfní pravému násobení G na $G_p \setminus G = \{G_p g \mid g \in G\}$
- Tranzitivní akce G jsou tedy až na izomorfismus určeny podgrupou $H \subset\subset G$ hrající roli stabilizátoru
- Tranzitivní realizace $\mathfrak{g}$ jsou tedy určeny podalgebrou $\mathfrak{h} \subset\subset \mathfrak{g}$
- Tranzitivní realizace příslušné A-konjugovaným podalgebrám jsou A-ekvivalentní
- Tranzitivní realizace je věrná, právě když příslušná podalgebra neobsahuje netriviální ideál $\mathfrak{g}$

Konstrukce tranzitivních realizací*

- Volbě $\mathfrak{h} = \{0\}$, tj. $H = E$ odpovídá pravé násobení na $E \setminus G = G$, které je generováno levoinvariantními vektorovými poli. Příslušná realizace se nazývá **generická**
- Další realizace se dostanou restrikcí generické na podvarietu $H \setminus G$.

* Magazev, Mikheyev, Shirokov, ***SIGMA*** 2015

Konstrukce tranzitivních realizací*

- Volbě $\mathfrak{h} = \{0\}$, tj. $H = E$ odpovídá pravé násobení na $E \setminus G = G$, které je generováno levoinvariantními vektorovými poli. Příslušná realizace se nazývá **generická**
- Další realizace se dostanou restrikcí generické na podvarietu $H \setminus G$.
- Budeme pracovat v **druhých kanonických souřadnicích**

$$g_{x^1,\ldots,x^n} = \mathrm{e}^{x^1 e_1} \cdots \mathrm{e}^{x^n e_n},$$

  $e_1, \ldots, e_n$ je báze $\mathfrak{g}$

- Zvolíme-li $e_1, \ldots, e_{n-m}$ bázi $\mathfrak{h}$ a doplníme vektory $e_{n-m+1}, \ldots, e_n$ na bázi $\mathfrak{g}$, budou souřadnice $y^\beta = x^1, \ldots, x^{n-m}$ popisovat bod v H

$$h_{y^1,\ldots,y^{n-m}} = \mathrm{e}^{y^1 e_1} \cdots \mathrm{e}^{y^{n-m} e_{n-m}}$$

  a souřadnice $q^a = x^{n-m+1}, \ldots, x^n$ třídu z $H \setminus G$

$$\bar{g}_{q^1,\ldots,q^m} = H\mathrm{e}^{q^1 e_{n-m+1}} \cdots \mathrm{e}^{q^m e_n}$$

* Magazev, Mikheyev, Shirokov, ***SIGMA*** 2015

Konstrukce tranzitivních realizací

- Souřadnicové vyjádření násobení zprava na G se bude v souřadnicích $q^a = x^{n-m+a}$ shodovat se souřadnicovým vyjádřením pravé akce na $H \setminus G$
- Generátory pravého násobení na G – generická realizace – se tedy v prvních m souřadnicích budou shodovat s generátory pravého násobení na $H \setminus G$

$$\hat{X}_i^a(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}q^a \bar{g}_q \mathrm{e}^{te_{n-m+i}} \Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}x^{n-m+a} g_{y,q} \mathrm{e}^{te_{n-m+i}} \Big|_{t=0} = X_i^{n-m+a}(y,q)$$

- Generická realizace

$$R^{\mathrm{gen}}(e_i)_{g(q,y)} = X_i(q,y) = \sum_{\beta=1}^{n-m} X_i^\beta(q,y) \frac{\partial}{\partial y^\beta} + \sum_{a=1}^{m} X_i^{n-m+a}(q) \frac{\partial}{\partial q^a}$$

tedy určuje realizaci

$$R(e_i)_{\bar{g}_q} = \hat{X}_i(q) = \sum_{a=1}^{m} X_i^{n-m+a}(q) \frac{\partial}{\partial q^a}$$

Konstrukce levoinvariantních vektorových polí*

- Levoinv. pole jsou generované pravým násobením, snadno zjistíme

$$X^i_j(y) = \left.\frac{\partial [g_y g_x]^i}{\partial x^j}\right|_{x=0} = [(\mathsf{d}L_{g_y})_e]^i_j$$

- V druhých kanonických souřadnicích pak přímým výpočtem získáme

$$[(\mathsf{d}L_{g_y})_e]^i_j = [\exp(-x^1\,\mathsf{ad}_{e_1})\cdots\exp(-x^{i-1}\,\mathsf{ad}_{e_{i-1}})]^i_j$$

---

* Shirokov, ***Russ. Phys. J.*** 1997

Netranzitivní realizace

- Uvažujme realizaci R na okolí nuly $U \subset \mathbb{R}^m$ a pro ni označme

$$r(x) := \dim R(\mathfrak{g})_x = \dim\{R(a)_x \mid a \in \mathfrak{g}\}$$

hodnost realizace v daném $x \in U$

- Realizace je netranzitivní, právě když $r(0) < m$
- Ze spojitosti realizace plyne, že je-li r v nule (lokálně) maximální, pak je zde lokálně konstantní
- Maximální hodnotu v okolí nuly nazveme rank realizace

$$\operatorname{rank} R = \inf_{\epsilon>0} \max_{|x|<\epsilon} r(x)$$

Realizace s konstantní hodností $r < m$

- Obraz $R(\mathfrak{g})$ je involutivní r-dimenzionální distribuce na U
- Podle Frobeniovy věty můžeme na U zvolit souřadnice $q^1, \dots, q^m$ takové, že U je foliováno integrálními podvarietami $q^i =$ const. pro $i = r+1, \dots, m$ tvořící orbity akce G
- Realizace je tedy tvaru

$$R(e_i) = X_i = \sum_{a=1}^{r} X_i^a(q^1, \dots, q^m)\partial q^a.$$

- To lze interpretovat jako $(m-r)$-parametrickou množinu tranzitivních realizací na integrálních podvarietách

Realizace s konstantní hodností $r < m$

- Postup lze obrátit: parametry tranzitivních realizací interpretovat jako funkce nových proměnných
- Je však třeba pracovat s klasifikací vůči silné ekvivalenci

Realizace s konstantní hodností $r < m$

- Postup lze obrátit: parametry tranzitivních realizací interpretovat jako funkce nových proměnných
- Je však třeba pracovat s klasifikací vůči silné ekvivalenci
- Jsou-li $\mathfrak{h}_1^x$ a $\mathfrak{h}_2^y$ třídy podalgeber $\mathfrak{g}$ a $R_1^{(x)}$ a $R_2^{(y)}$ příslušné tranzitivní realizace, pak jsou netranzitivní realizace

$$R_1(a)_{(p,x)} = R_1^{(x)}(a)_p, \quad R_2(a)_{(p,y)} = R_2^{(y)}(a)_p$$

ekvivalentní, právě když existuje lokální difeomorfismus $x \mapsto \Psi(x)$ a automorfismus $\alpha \in A$ tak, že

$$\mathfrak{h}_2^{\Psi(x)} = \alpha(\mathfrak{h}_1^x)$$

Realizace s konstantní hodností $r < m$

- Postup lze obrátit: parametry tranzitivních realizací interpretovat jako funkce nových proměnných
- Je však třeba pracovat s klasifikací vůči silné ekvivalenci
- Jsou-li $\mathfrak{h}_1^x$ a $\mathfrak{h}_2^y$ třídy podalgeber $\mathfrak{g}$ a $R_1^{(x)}$ a $R_2^{(y)}$ příslušné tranzitivní realizace, pak jsou netranzitivní realizace

  $$R_1(a)_{(p,x)} = R_1^{(x)}(a)_p, \quad R_2(a)_{(p,y)} = R_2^{(y)}(a)_p$$

  ekvivalentní, právě když existuje lokální difeomorfismus $x \mapsto \Psi(x)$ a automorfismus $\alpha \in A$ tak, že

  $$\mathfrak{h}_2^{\Psi(x)} = \alpha(\mathfrak{h}_1^x)$$

- Libovolná realizace lze rozšířit triviálně prostým přidáním proměnných

Příklad

- Nejjednodušší příklad je 2D komutativní algebra $2\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{e_1, e_2\}$.
- Ta má podalgebry generované 0, (e_1), $(e_2 + ae_1)$, (e_1, e_2)
- Množině podalgeber generovaných $e_2 + ae_1$ odpovídá realizace na $\mathbb{R}$

$$R^{(a)}(e_1) = \partial_1, \quad R^{(a)}(e_2) = a\partial_1$$

- Dostáváme netranzitivní realizace na $\mathbb{R}^2$

$$R^f(e_1) = \partial_1, \quad R^f(e_2) = f(x_2)\partial_1$$

pro $f \in C^\infty$.

- R^f a R^g jsou ekvivalentní, právě když existuje hladká ψ

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) \neq 0, \quad f \circ \psi = g$$

- Všem neekvivalentním analytickým odpovídají monomy $f(x) = x^k$

Realizacce s nekonstantním r

- Označme $r := r(0) < \operatorname{rank} R$
- Množina $A := \{x \in U \mid r(x) < \operatorname{rank} R\}$ je tvořena integrálními podvarietami realizace (obecně různých dimenzí), označme tu procházející nulou A_0
- Vhodnou volbou souřadnic můžeme zajistit, že A_0 je popsána rovnicemi $q^{r+1} = \ldots = q^m = 0$

Realizacce s nekonstantním r

- Označme $r := r(0) < \text{rank } R$
- Množina $A := \{x \in U \mid r(x) < \text{rank } R\}$ je tvořena integrálními podvarietami realizace (obecně různých dimenzí), označme tu procházející nulou A_0
- Vhodnou volbou souřadnic můžeme zajistit, že A_0 je popsána rovnicemi $q^{r+1} = \ldots = q^m = 0$
- Doplněk B množiny A je tvořen body x, kde $r(x)$ je lokálně maximální, a tedy lokálně konstantní, B je tedy otevřená
- Realizace R zúžená na souvislé komponenty B_i má konstantní r a až na difeomorfismus B_i je to zúžení nějaké již nalezené realizace R_i 14
- Na komponentách B_i je tedy

$$R = (\Phi_i)_* R_i,$$

kde Φ_i jsou difeomorfismy B_i takové, že limita $\mathrm{d}\Phi_i$ na hranici B_i je singulární a R jde spojitě dodefinovat na A

Realizace s nekonstantním r

- Postup lze opět obrátit
- Vezměme realizaci R_1 na $\mathbb{R}^m$ s konstantní hodností
- Najděme hladkou bijekci Φ takovou, že $\mathrm{d}\Phi$ je singulární na $A_0 := \{x^{r+1} = \ldots = x^m = 0\}$, ale na každém okolí nuly je někde regulární
- V analytickém případě takto již dokážeme zkonstruovat všechny realizace s nekonstantním r
- Budeme-li brát neekvivalentní R_1 a neekvivalentní difeomorfismy Φ vůči změně souřadnic, dostaneme neekvivalentní R
- V neanalytickém lze na některých komponentách $B := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \det \mathrm{d}\Phi_x \neq 0\}$ R hladce nahradit jinou reprezentací

Příklad

- Vezměme 1D algebru $\mathfrak{g}_1 = \text{span}\{e_1\}$ a podívejme se na realizace s $r(0) = 0$ a rankem 1 na $\mathbb{R}$
- Je jediná realizace s konst. $r(x) = 1$ na $\mathbb{R}$

$$R_1(e_1) = \partial_1$$

- Hledané realizace jsou $\phi_* R_1$ pro $\phi'(0) = 0$
- Označíme-li $f = \phi'$, jsou to

$$R^f(e_1) = f(x_1)\partial_1, \quad f(0) = 0$$

- R^f a R^g jsou ekvivalentní, právě když existuje ψ, $\psi'(0) \neq 0$ a $f \circ \psi = g$
- V případě $\mathfrak{g}_1$ je realizace cokoliv přiřazující

$$e_1 \mapsto \sum f_i(x_1, \dots, x_n)\partial_i$$

Závěr

- Klasifikace všech realizací dané Lieovy algebry je komplikovaná úloha, která nejspíš nemá jednoduché řešení – v tomto ohledu tedy není ani příliš „rozumná“
- Rozumné je hledat klasifikaci podalgeber a tak získat klasifikaci tranzitivních realizací
- Ty ostatní pak již lze zkonstruovat popsanými postupy