O limitních bodech vlastních čísel posloupnosti ořezaných Jacobiho matic

František Štampach

Čtvrtek 31.3.2011, místnost T112

Abstrakt

Na separabilním Hilbertově prostoru $\mathcal{H}$ s ortonormální bazí $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ definujeme tridiagonální operátor J vztahy

$$\begin{aligned} Je_1 &= \lambda_1 e_1 + w_1 e_2, \\ Je_n &= w_{n-1}e_{n-1} + \lambda_n e_n + w_n e_{n+1}, \qquad \text{pro } n \geq 2, \end{aligned}$$

kde $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálná a $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladná posloupnost. Pod n-tým ořezáním J rozumíme konečnědimenzionální operátor $J_n := P_n J P_n$, kde P_n je ortogonální projektor na prostor $\mathcal{H}_n := \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Zde vyvstává přirozená otázka: Je-li $\{\xi_n\}$ konvergentní posloupnost vlastních hodnot operátorů J_n, patří $\lim_{n\to\infty} \xi_n$ do spektra operátoru J? Odpověď je záporná, a to i za předpokladu, že J je samosdružený. Pro tyto účely zavedeme množinu

$$\Lambda(J) := \{\xi \in \mathbb{C} : \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(\operatorname{spec}(J_n), \xi) = 0\}.$$

Je známo, že je-li J samosdružený, platí inkluze $spec(J) \subset \Lambda(J)$. Na semináři dokážeme několik tvrzení, která obsahují postačující podmínky pro to, aby platila rovnost $spec(J) = \Lambda(J)$. A tedy odpověď na výše položenou otázku bude v těchto případech kladná.