Nutná a postačující podmínka pro separovatelnost matice hustoty.
Vedoucí: Č. Burdík a O. Navrátil

Nechť jsou $\mathcal{V}_1$ a $\mathcal{V}_2$ konečně–dimenzionální vektorové prostory nad $\mathbb{C}$ se skalárním součinem, $\dim \mathcal{V}_1 = n$ a $\dim \mathcal{V}_2 = m$.
Nechť je $\{\mathbf{e}_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ báze ve $\mathcal{V}_1$ a $\{\mathbf{f}_\mu\,,\ \mu = 1, 2, \ldots, m\}$ báze ve $\mathcal{V}_2$.

Označme $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ vektorový prostor dimenze $\dim \mathcal{V} = mn$ nad $\mathbb{C}$ s bází

$$\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\mu\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\ \ \mu = 1, 2, \ldots, m\}\,.$$

To znamená, že $\mathcal{V}$ je množina všech prvků $\mathbf{x}$ tvaru

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} x_{i\mu} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\mu\,,$$

kde $x_{i\mu} \in \mathbb{C}$.

Skalární součin na $\mathcal{V}$ definujeme pomocí vztahu

$$(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_2) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\,(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)\,.$$

Jestliže jsou $\mathbf{A} : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_1$ a $\mathbf{B} : \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_2$ lineární zobrazení, **definujeme lineární zobrazeni** $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ vztahem

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{v} \otimes \mathbf{B}\mathbf{w}\,.$$

Lineárnímu operátoru ρ na prostoru $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ lze v bázi $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\mu$ přiřadit matici typu $mn \times mn$ vztahem

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_\mu) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} \rho_{i\mu k\nu} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{f}_\nu\,.$$

Dále definujeme **částečnou transpozici** T_1 zobrazení $\boldsymbol{\rho}$ vzhledem k prostoru $\mathcal{V}_1$ vztahem

$$\left(\boldsymbol{\rho}^{T_1}\right)_{i\mu k\nu} = \rho_{k\mu i\nu}$$

a **částečnou transpozici** T_2 vzhledem k prostoru $\mathcal{V}_2$ jako

$$\left(\boldsymbol{\rho}^{T_2}\right)_{i\mu k\nu} = \rho_{i\nu k\mu}\,.$$

Definice. Řekneme, že lineární zobrazení $\boldsymbol{\rho} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ je *matice hustoty*, jestliže platí:

1. $\boldsymbol{\rho}^+ = \boldsymbol{\rho}$,
2. $\mathrm{Tr}\, \boldsymbol{\rho} = 1$,
3. pro každé $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je $(\boldsymbol{\rho}\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$.

Definice. Řekneme, že matice hustoty $\boldsymbol{\rho}$ na $\mathcal{V}$ je *separabilní*, jestliže ji lze zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{\rho} = \sum_{\alpha=1}^{N} p_\alpha \boldsymbol{\rho}_1^\alpha \otimes \boldsymbol{\rho}_2^\alpha \,,$$

kde $p_\alpha > 0$, $\sum\limits_{\alpha=1}^{N} p_\alpha = 1$ a $\boldsymbol{\rho}_1^\alpha$ a $\boldsymbol{\rho}_2^\alpha$ jsou matice hustoty na vektorových prostorech $\mathcal{V}_1$ a $\mathcal{V}_2$.

Pak platí následující věta:

Věta. Je-li $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2 = 2$, je matice hustoty $\boldsymbol{\rho}$ na prostoru $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ separabilní právě tehdy, když jsou $\boldsymbol{\rho}^{T_1}$ a $\boldsymbol{\rho}^{T_2}$ matice hustoty.

Úkol

Rozhodněte, zda uvedená věta platí i pro $\dim \mathcal{V}_1 = \dim \mathcal{V}_2 = 3$.

Pokud uvedená věta neplatí, najděte další předpoklady na matici hustoty $\boldsymbol{\rho}$, které zaručují, že je separabilní.